N. ..

System

der

reinen und angewandten

Mechanik

fester Körper

Von

J. J. A. Ide,

Doktor der Philosophie und Mitglied der physikalischen Gesellschaft
zu Göttingen.

Zweiter Theil.

Berlin,
bei Heinrich Frölich. 1802.

Inhalt
des zweiten Theils.

Erstes Kapitel. Von der Bewegung der Punkte.

Zweites Kapitel. Von der fortrückenden Bewegung eines Körpers in gerader Linie.

Drittes Kapitel. Von der fortrückenden Bewegung der Körper in krummen Linien.

Druckfehler im zweyten Theile.

S. 32. Z. 3. fällt — weg.
— 64. — 7. von unten statt Igr^2, lies $I - gr^2$
— 110. — 7. statt T, lies I
— 133. — 14. fällt *) weg.
— 136. — 7. statt $+\surd$, lies $=\surd$
— 139. — 5. von unten st. $-K-W$, l. $=K-W$
— 146. — 12. st. $u-u$, l. $u-u^3$
— 149. — 7. st. $-\varphi$, l. $,\varphi$
— 159. — 11. st. Hebelkraft, l. Hebekraft
— 349. — 9. st. vollendenden, l. vollenden
— 354. — 2. st. wenn, l. nenne

Die

Mechanik,

oder die

Lehre von der Bewegung fester Körper.

Zweyter Theil.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung der Punkte.

§. 1.

Die Mechanik umfaßt zwey Lehren, die im Wesentlichen ganz von einander verschieden sind. Die eine von diesen, die Phoronomie, betrachtet bloß die Bewegungen an sich, ohne darauf zu sehen, wie sie entstanden seyn können; die andere handelt dagegen von den Ursachen derselben, oder den Kräften und hat davon den Namen Dynamik. Beyde Lehren sind aber doch zu innig mit einander verwandt, als daß irgend ein Vortheil daraus erwachsen könnte, wenn man sie absondern, und aus jeder von ihnen eine eigene Wissenschaft machen wollte.

§. 2.

Wenn sich ein fester Körper bewegt, so hat dabey jedes Theilchen, jeder Punkt in ihm, seine eigene Bewegung. In den meisten Fällen ist diese nicht für alle Punkte des Körpers einerley; man sieht z. B. an einer Kugel, die auf einer Ebene hinrollt, daß ihr Mittelpunkt in gerader Linie fortgeht, aber niemand wird wohl behaupten, daß eben die Bewegung auch einem Punkte in ihrer Oberfläche zukomme. Es wird also nothwendig seyn, zuerst die Bewegung eines einzelnen Punktes besonders zu betrachten, um nachher von der Bewegung eines Körpers, oder ganzen Systems von Punkten richtig urtheilen zu können.

§. 3.

Schon in der Geometrie wird gelehrt, daß ein Punkt, indem er sich bewegt, eine Linie beschreibe. Diese Linie nennt man in der Mechanik den **Weg**, oder den durchlaufenen **Raum** des Punktes, und seine Bewegung heißt **geradlinigt** oder **krummlinigt**, je nachdem sein Weg gerade oder gekrümmt ist.

§. 4.

Bey der geradlinigten Bewegung eines Punktes kommen drey Dinge in Betracht: die **Richtung**, nach der der Punkt fortgeht, der Raum, den er in einer bestimmten Zeit zurücklegt, und die Zeit selbst, die während dieser Bewegung verfließt.

Die Richtung bezieht sich bloß auf die Lage der geraden Linien, und ist also, so lange sich der Punkt darin fortbewegt, unveränderlich. Bey krummlinigter Bewegung hingegen ändert sie sich jeden Augenblick, und kommt in jeder Stelle der Kurve, die der Punkt beschreibt, mit der Tangente überein, die sich daselbst an der Kurve ziehen läßt. Die Betrachtung krummlinigter Bewegung setzt also, wie man hieraus sieht, schon Kenntnisse der geradlinigten Bewegung voraus;

daher wollen wir uns hier zu Anfange bloß auf letztere einschränken.

§. 5.

Man kann ferner noch die Bewegung in **kontinuirliche** oder **stetige**, und **dikontinuirliche** oder **unterbrochene** eintheilen. Bey jener bewegt sich der Punkt fortdauernd nach einem gewissen Gesetze, so daß dabey Zeit und Raum auf irgend eine Art von einander abhängen. Letztere hingegen wäre eine solche, wo von Zeit zu Zeit plötzliche Aenderungen einträten, die das Gesetz zwischen Zeit und Raum immer von neuem zerstörten, und ein anderes hervorbrächten. Da dergleichen Bewegungen in der Natur höchst selten, und genau genommen, vielleicht nie statt finden, so verdienen sie gerade nicht, besonders betrachtet zu werden. Wenn also in der Folge von irgend einer Bewegung die Rede ist, so soll darunter jedesmal eine solche verstanden werden, wobey der Raum S, der in einer beliebigen Zeit t zurückgelegt ist, durch dieses t auf die eine oder die andere Art sich bestimmen läßt.

Gleichförmige Bewegung.

§. 6.

Unter allen regelmäßigen Bewegungen ist die **gleichförmige** Bewegung, oder die, wobey Zeit und Raum in einerley Verhältnisse zunehmen, die einfachste und natürlichste.

Man setze, der Punkt lege in einem gewissen Zeit-maaße, z. B. in der ersten Sekunde, den Raum c zurück, nach Verlauf von t Sekunden sey er aber durch den Raum s fortgegangen, und dabey finde immer das Gesetz statt, daß die Räume sich wie die dazu gehörigen Zeiten verhalten, so hat man

$$1 : t = c : s, \text{ folglich}$$
$$t = ct \; .$$

eine Gleichung, worin alles enthalten ist, was sich über die Natur der gleichförmigen Bewegung sagen läßt.

§. 7.

Läßt man in ihr die Zeit t um einen Theil Δt wachsen, und nennt Δs die daraus entstehende Aenderung von s, so ist $s + \Delta s$ der in $t + \Delta t$ zurückgelegte Raum, also:

$$s + \Delta s = c(t + \Delta t) = ct + c\Delta t$$

davon $s = \; . \; . \; . \; . \; . \; ct$ abgezogen,

bleibt $\Delta s = c\Delta t.$

Der Punkt durchläuft also während seiner ganzen Bewegung in gleichen Zeiten immer gleiche Räume, und in einer Sekunde stets dasselbe Stück c, das er in der ersten Sekunde zurückgelegt hat.

§. 8.

Dieses c dient folglich zum Maaße der gleichförmigen Bewegung, indem davon abhängt, wie viel Raum in einer gegebenen Zeit zurückgelegt wird; man nennt es auch die **Geschwindigkeit** des Punktes.

Es sey die Geschwindigkeit eines Punktes $A = c$, die eines andern Punktes $B = C$, so durchläuft ersterer in der Zeit t den Raum $s = ct$, letzterer in der Zeit T den Raum $S = CT$. Ist nun $t = T$, so hat man:

$$s : S = ct : Ct = c : C. \text{ d. h.}$$

die Räume, die zwey Punkte bey gleichförmiger Bewegung in einerley Zeit durchlaufen, verhalten sich, wie ihre Geschwindigkeiten.

Soll dagegen $s = S$ seyn, so wird $ct = CT$, also

$$t : T = C : c, \text{ oder}$$

die Zeiten, worin zwey Punkte, die sich gleichförmig bewegen, einerley Raum zurücklegen, verhalten sich verkehrt, wie ihre Geschwindigkeiten.

Ungleichförmige Bewegung.

§. 9.

Wenn bey gleichen Aenderungen der Zeit die Aenderungen des Raumes ungleich sind, so nennt man die Bewegung **ungleichförmig**; sie ist **beschleunigt**, wenn der Punkt in jedem folgenden gleich großen Zeittheile einen größern Raum durchläuft, als im vorhergehenden; **verzögert**, wenn dieser Raum nach und nach kleiner wird.

§. 10.

Bey der Voraussetzung, daß sich der Punkt nach einem stetigen Gesetze fortbewege (§. 5.), muß sich die Ungleichheit der Räume auf das kleinste Zeitmaaß erstrecken, worin man die ganze Dauer seiner Bewegung abtheilt. Daher hat der Punkt nur an jeder einzelnen

Stelle seines Weges eine bestimmte Geschwindigkeit; sie ist von Zeit zu Zeit fortwährenden Aenderungen unterworfen, so wie das Verhältniß der einzelnen Räume zu den Zeiten, worin sie zurückgelegt sind, anders wird. Bey beschleunigter Bewegung wird also die Geschwindigkeit immer größer, und bey verzögerter Bewegung immer kleiner; überhaupt ist bey ungleichförmigen Bewegungen die Geschwindigkeit eine veränderliche Größe, die, eben so wie der Raum, von der Zeit abhängt.

Anmerk. Um dies durch ein sinnlicheres Beyspiel zu erläutern, setze man: ein Baumstamm sey, wie gewöhnlich, nach der Spitze zu, dünner, nach der Wurzel zu dicker. Niemand wird sagen, der Stamm habe gar keine Dicke, weil sie nicht an allen Stellen gleich groß ist: aber eine bestimmte Dicke kann er nur an einer einzigen Stelle haben, und so wie man von dem einen Ende zum andern weiter geht, ändert sie sich unabläßig. Dennoch läßt sie sich an jeder gegebenen Stelle unmittelbar messen, welches bey veränderlicher Geschwindigkeit nicht angeht; offenbar deshalb, weil jene bleibend, diese hingegen vorübergehend ist.

§. 11.

Aufgabe. Es sey das Gesetz bekannt, nach welchem der jedesmalige Raum s von der dazu gehörigen Zeit t abhängt; man sucht die Geschwindigkeit, die der Punkt zu Ende dieser Zeit t erhalten hat.

Fig. 1. **Aufl.** 1. Wir wollen annehmen, der Punkt habe während der Zeit t mit beschleunigter Bewegung den Raum $AP = s$ zurückgelegt, und sey nun gegenwärtig in P; seine Geschwindigkeit sey daselbst $= u$.

2. In dem nächsten Zeittheilchen Δt geht er also um ein Stück $Pp = \Delta s$ weiter, und wenn er in p an-

langt, hat seine Geschwindigkeit einen Zuwachs $=$ Δu bekommen, so daß sie an dieser Stelle $= u + \Delta u$ ist.

3) Bewegte sich der Punkt während des Zeittheils Δt gleichförmig, so durchliefe er darin mit der Geschwindigkeit u den Raum $= u\Delta t$, und mit der Geschwindigkeit $u + \Delta u$ den Raum $= (u + \Delta u) . \Delta t$.

4) Von diesen Räumen ist also unstreitig ersterer kleiner als Δs, letzterer größer als Δs: denn des Punktes Geschwindigkeit ist ja innerhalb der Zeit Δt stets größer als u, und stets kleiner als $u + \Delta u$. Man hat also:

$$\Delta s > u\Delta t, \text{ und}$$
$$\Delta s < (u + \Delta u) \Delta t, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > u, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < u + \Delta u, \text{ folglich:}$$

$$\Delta u > \frac{\Delta s}{\Delta t} - u$$

5) Hierbey ist die Zeit Δt willkührlich; man kann sie also so klein setzen, als man will. Läßt man sie unendlich abnehmen, so nimmt auch Δu unendlich ab, folglich auch der Unterschied $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} - u$, da es stets geringer als Δu ist.

6) Daher nähert sich $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze u; zugleich aber nähert sich bey eben der Voraussetzung der

Werth von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze $\frac{ds}{dt}$; folglich erhält man: $u = \frac{ds}{dt}$.

7) Ist die Bewegung des Punktes verzögernd, so leidet seine Geschwindigkeit u, indem er durch den Raum Pp fortgeht, eine Abnahme $= \Delta u$, und wird also in $p = u - \Delta u$.

8) Bewegte er sich die Zeit Δt hindurch gleichförmig, so legte er in derselben mit der Geschwindigkeit u den Weg $= u\Delta t$, und mit der Geschwindigkeit $u - \Delta u$ den Weg $= (u - \Delta u)\, \Delta t$ zurück. Es ist daher:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < u, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > u - \Delta u, \text{ folglich}$$

$$\Delta u > u - \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

9) Läßt man nun wieder Δt unendlich abnehmen, so nimmt auch Δu, und mit diesem zugleich $u - \frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich ab; also nähert sich wieder $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze u, wie im erstern Falle.

§. 12.

Gegenseitig wird $ds = udt$, also $s = \int udt$, wozu weiter nichts addirt wird, weil für $t = 0$, d. h. zu Anfange der Bewegung, auch $s = 0$ ist.

§. 13.

Unter den ungleichförmigen Bewegungen kommen zwey besondere Arten: die gleichförmig beschleunigte, und gleichförmig verzögerte Bewegung am häufigsten vor, und verdienen deshalb vorzüglich bemerkt zu werden. Bey ersterer verhält sich der Zuwachs, bey letzterer die Abnahme der Geschwindigkeit, vom Anfange der Bewegung angerechnet, wie die Zeit, die während derselben verflossen ist.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

§. 14.

Es sey zu Anfange derselben, oder für $t = o$, die Geschwindigkeit des Punktes $= c$; der Zuwachs, den sie in der ersten Sekunde dieser Bewegung erhält, $= \varkappa$; so hat sie nach Verlauf von t Sekunden den Zuwachs $= \varkappa t$ bekommen, und ist also in diesem Augenblicke $= c + \varkappa t$.

Man setze diese Geschwindigkeit $= u$; den Raum, den der Punkt während der Zeit t zurückgelegt hat, $= s$, so wird $s = \int u dt = \int dt\,(c + \varkappa t) = ct + \frac{1}{2}\varkappa t^2$.

§. 15.

Ist die anfängliche Geschwindigkeit $c = o$, so hat man:

1. $u = \varkappa t$, und $s = \frac{1}{2}\varkappa t^2$; also verhält sich dann der Raum, wie das Quadrat der Zeit, worin er durchlaufen ist.

2. Der Weg, den der Punkt in der ersten Sekunde dieser Bewegung zurücklegt, ist $= \frac{1}{2} \varkappa$; setzt man ihn $= g$, so wird $s = gt^2$, und $u = 2gt$.

3. Da $u^2 = 4g^2t^2 = 4gs$, so erhält man $u = \sqrt{4gs} = 2\sqrt{gs}$; daher verhält sich die Geschwindigkeit auch, wie die Quadratwurzel aus dem Raume.

4. Gegenseitig ist $s = \frac{u^2}{4g}$

5. Es ist $ut = 2gt^2 = 2s$, d. h. der Raum, den der Punkt in der Zeit t durchläuft, wenn er sich mit der Geschwindigkeit u gleichförmig bewegt, ist doppelt so groß als der, den er in eben der Zeit durchläuft, wenn seine Geschwindigkeit während derselben von 0 bis zu u gleichförmig zunimmt.

Gleichförmig verminderte Bewegung.

§. 16.

Bey dieser sey die anfängliche Geschwindigkeit des Punktes $= c$; die Abnahme derselben in der ersten Sekunde $= \varkappa$, so beträgt diese in der Zeit $t = \varkappa t$; also ist die Geschwindigkeit u, die dem Punkte am Ende dieser Zeit noch übrig bleibt, $= c - \varkappa t$. Nennt man daher s den Raum, den der Punkt während der Zeit t zurückgelegt hat, so wird $s = \int u dt = \int dt (c - \varkappa t) = ct - \frac{1}{2}\varkappa t^2$.

§. 17.

Für $u = 0$, wird $\varkappa t = c$, folglich $t = \frac{c}{\varkappa}$. Dies ist also die Zeit, in welcher der Punkt alle seine Geschwindigkeit verliert, oder die Dauer seiner ganzen Bewegung. Für längere Zeit würde nemlich die Geschwindigkeit u negativ, d. h. der Punkt bekäme alsdann eine gleichförmig beschleunigte Bewegung nach entgegengesetzter Richtung.

Setzt man diesen Werth von t in den für s (§. 16.) gefundenen Ausdruck, so erhält man für den Raum, den der Punkt während der ganzen Zeit seiner Bewegung durchlaufen ist:

$$s = \frac{c^2}{\varkappa} - \frac{c^2}{2\varkappa} = \frac{c^2}{2\varkappa}.$$

Eben diesen Werth für s erhält man auch, wenn man in §. 15. n° 1, $t = \frac{c}{\varkappa}$ setzt. Daraus folgt also: daß der Punkt eben den Raum während jener Zeit zurücklegt, wenn seine Geschwindigkeit von o an in eben dem Maaße gleichförmig wächst, als sie im vorigen Falle abnahm.

Wirkung der Kräfte auf die Bewegung eines Punktes.

§. 18.

Ein Körper, der frey von aller Einwirkung fremder Dinge ist, kann den Zustand, worin er sich befindet, nicht durch sich selbst ändern. Er kann also nicht sich selbst aus der Ruhe in Bewegung setzen, und wenn er sich nach irgend einer Richtung mit einer einmal erhaltenen Geschwindigkeit fortbewegt, so hat er weder eigenes Vermögen, von dieser Richtung abzulenken, noch sich selbst eine schnellere oder langsamere Bewegung zu ertheilen, wofern nicht eine äußere Ursache, eine Kraft (Statik §. 1.) die eine oder die andere dieser Aenderungen in seiner Bewegung hervorbringt. Dies ist eine natürliche Eigenschaft aller Materie, die man mit dem Namen ihrer **Trägheit** belegt.

§. 19.

Wenn also ein Körper in Ruhe ist, so bleibt er darin so lange, bis ihn eine Kraft in Bewegung setzt; und bewegt er sich nach irgend einer Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit, so setzt er diese Bewegung so lange fort, bis eine Kraft entweder in Ansehung der Richtung oder der Geschwindigkeit eine Aenderung bewirkt. Gegenseitig folgt:

Daß ein Körper, der sich mit veränderlicher Geschwindigkeit oder in einer Kurve bewegt, beständigen Einwirkungen von Kräften ausgesetzt seyn müsse, die jeden Augenblick seine Bewegung entweder beschleunigen, oder verzögern, oder ihn von seiner vorigen Richtung abzuweichen nöthigen.

§. 20.

Zwey gleiche Kräfte, die auf einen Punkt nach entgegengesetzten Richtungen wirken, erhalten ihn in Ruhe; jede von ihnen, einzeln genommen, bringt ihn aber aus der Ruhe in Bewegung, und es liegt schon in dem Begriffe der Gleichheit, daß ihm beyde im ersten Augenblicke der Wirkung einerley Geschwindigkeit ertheilen müssen.

§. 21.

Dagegen verhalten sich die anfänglichen Geschwindigkeiten, die der Punkt durch zwey ungleiche Kräfte p und q erhält, wenn sie ihn, einzeln genommen, aus der Ruhe in Bewegung setzen, eben so wie diese Kräfte.

Beweis. 1) Man setze zuerst, die Kraft q sey irgend ein Vielfaches von p, oder $= np$, so kann man ihr, nach der Richtung, die sie hat, n einzelne Kräfte substituiren, deren jede $= p$ ist.

2) Nun ertheile die Kraft p dem Punkte unmittelbar eine Geschwindigkeit $= c$, oder treibe ihn in dem ersten Zeitmomente dt durch den Raum cdt, so hat eben diese augenblickliche Wirkung jede andere Kraft auf ihn, die $= p$ ist; also bewirken n solcher Kräfte, die auf ihn zu gleicher Zeit nach einerley Richtung angebracht werden, daß er im ersten dt durch den n fachen Raum ncdt geht, und folglich die Geschwindigkeit nc erhält: denn jede von ihnen wirkt für sich auf den Punkt, unabhängig von den übrigen Kräften.

3) Eben dies bewirkt also auch die Kraft $q = np$; daher ist der Satz für diesen Fall erwiesen.

4) Es sey nun ferner die Kraft $q = \frac{p}{n}$, so ist $p = nq$, also die Geschwindigkeit c, die die Kraft p dem Punkte ertheilt, n mal so groß, als die ihm q ertheilt, folglich umgekehrt die Geschwindigkeit, die er durch q erhält, $= \frac{c}{n}$, oder ein ntel von der, die er durch p erhält.

5) Endlich sey $q = \frac{m}{n} \cdot p$, so bekommt der Punkt durch die Kraft $\frac{p}{n}$ die Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$, folglich durch $q = m\,(\frac{p}{n})$ die Geschwindigkeit $m\,(\frac{c}{n}) = \frac{m}{n} \cdot c$; also sind wieder die Wirkungen in dem Verhältnisse der Kräfte.

6) Da nun unter $\frac{m}{n}$ jede Verhältnißzahl begriffen ist, so erhellet, daß bey jedem Verhältnisse, das zwischen p und q statt finden kann, auch die Geschwindigkeiten, die diese Kräfte einzeln dem Punkte im ersten Augenblicke der Wirkung ertheilen, dasselbe Verhältniß $p : q$ zu einander haben müssen.

§. 22.

Wir kennen in der Natur solche Kräfte nicht, die durch eine augenblickliche Wirkung irgend eine angebliche Bewegung hervorzubringen fähig wären; selbst während des Stoßes, wodurch ein Körper dem andern Geschwindigkeit mittheilt, verfließt allemal eine gewisse Zeit, und sey diese auch noch so gering, so kann man doch nie sagen, daß dabey die ganze Bewegung plötzlich entstehe. Indeß war die Vergleichung zwischen Kräften und den Geschwindigkeiten, die sie unmittelbar erzeugen, doch nothwendig, um daraus ferner herleiten zu können, was für Wirkung eine Kraft in einer bestimmten Zeit ausübt, wenn sie die Bewegung des

Punk=

Punktes während dieser Zeit nach einerley Richtung fortdauernd beschleunigt.

§. 23.

Aufgabe. Eine unveränderliche Kraft p wirkt auf einen Punkt, der Anfangs in Ruhe ist, eine bestimmte Zeit hindurch nach einerley Richtung ununterbrochen fort; man fragt, wie seine Bewegung während dieser Zeit beschaffen sey, und welche Geschwindigkeit er zu Ende derselben erlangt habe.

Aufl. 1) Sie ertheile ihm im ersten Zeittheilchen dt die Geschwindigkeit fdt. Wäre ihre Wirkung hiermit zu Ende, so würde der Punkt mit dieser Geschwindigkeit vermöge seiner Trägheit (§. 18.) gleichförmig fortgehen. Aber der Voraussetzung nach soll auf ihn die Kraft p in jedem folgenden Zeittheilchen von neuem wirken; seine vorige Geschwindigkeit fdt erhält also im zweyten dt denselben Zuwachs fdt, und wird folglich $= 2fdt$.

2) Um eben so viel vermehrt sie sich also auch in jedem nächsten Zeitmomente dt, so daß sie nach Verlauf der Zeit ndt zu nfdt angewachsen ist.

3) Man nehme nun n so groß an, daß $ndt =$ der gegebenen Zeit t wird, und nenne die gesuchte Geschwindigkeit, die der Punkt zu Ende derselben bekommen hat, $= u$; so hat man $u = nfdt$, oder wenn man für ndt seinen Werth t substituirt: $u = ft$.

4 Diese Geschwindigkeit verhält sich also jedesmal wie die Dauer der Bewegung, und hängt außer-

dem davon ab, wie groß die erste augenblickliche Wirkung der Kraft auf den Punkt gewesen ist: denn auf dieser beruhet der Koefficient f.

5) Die Bewegung des Punktes ist demnach, während ihn die Kraft p beschleunigt, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (§. 15.).

§. 24.

Man setze, eine andere Kraft q ertheile dem Punkte im ersten Zeitmomente dt die Geschwindigkeit gdt, so erhält er durch ihre fortgesetzte Wirkung während der Zeit t die Geschwindigkeit gt. Nennen wir diese v, so ist:

$$u : v = f : g;$$ ferner ist aber auch:

$$p : q = fdt : gdt \text{ (§. 21.)} = f : g,$$

folglich wird $p : q = u : v$, oder:

die Geschwindigkeiten, die zwey ungleiche Kräfte einzeln genommen einem Punkte in einerley Zeit ertheilen, indem sie während dieser Zeit unablässig auf ihn wirken, verhalten sich gerade so, wie die Kräfte.

§. 25.

Demnach verhalten sich auch die Räume, die der Punkt in einer gegebenen Zeit t zurücklegt, indem während derselben die eine oder die andere von beyden Kräften p und q beständig auf ihn wirkt, direkt wie diese Kräfte.

Man nenne nemlich diese Räume y und z, so hat man:

$ut = 2y$, und $vt = 2z$ (§. 15. 5.), also
$y : z = u : v$, folglich auch
$y : z = p : q$

§. 26.

Bewegt sich der Punkt in dem Augenblicke, wo die Kraft p auf ihn zu wirken anfängt, oder für $t = 0$, schon mit irgend einer Geschwindigkeit $= c$, und zwar nach eben der Richtung, die die Kraft hat, so leidet diese von Zeit zu Zeit fortwährende Aenderungen; wir wollen setzen, sie sey nach Verlauf der Zeit t zu u angewachsen.

Da sie durch die Kraft in jedem Zeittheilchen dt den Zuwachs fdt bekommt, so ist jedesmal $du = fdt$, also $u = \text{Const} + ft$, und weil für $t = 0$, $u = c$ war, so hat man $\text{Const} = c$, folglich $u = c + ft$.

Der Punkt hat also auch in diesem Falle eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (§. 14.).

§. 27.

Wirkt die Kraft der anfänglichen Bewegung des Punktes entgegen, so verzögert sie dieselbe in jedem Augenblicke, und zwar auf folgende Art:

Die Geschwindigkeit des Punktes sey Anfangs $= c$, nach Verlauf der Zeit t aber $= u$, so macht der Punkt im nächsten dt vermöge seiner Trägheit den Weg $= udt$; die Kraft giebt ihm aber in eben dem Augenblicke die entgegengesetzte Geschwindigkeit fdt, oder treibt ihn um fdt zurück, also durchläuft er in diesem dt nur den Raum $udt - fdt^2$.

Wird dieser durch dt dividirt, so erhält man für seine eigentliche Geschwindigkeit während dieses Zeittheilchens $u - fdt$. Es wird also $du = - fdt$, folglich $u = Const - ft$, und da für $t = o$, $u = c$ ist: $Const = c$, oder $u = c - ft$.

Die Kraft bewirkt demnach hier eine gleichförmig verminderte Bewegung (§. 16.).

Zweites Kapitel.

Von der fortgehenden Bewegung eines Körpers in gerader Linie.

---

§. 28.

Man sagt von einem festen Körper, er habe eine **fortgehende** Bewegung, wenn sich alle Punkte in ihm zugleich mit einerley Geschwindigkeit und nach parallelen Richtungen fortbewegen.

§. 29.

Die Möglichkeit einer solchen Bewegung erhellet leicht. Es ist nemlich klar, daß die Bewegung eines festen Körpers überhaupt nichts weiter voraussetze, als daß dabey jeder seiner Punkte von andern stets dieselbe Entfernung behalte; eine Bedingung, die im gegenwärtigen Falle offenbar erfüllt wird. Wichtiger ist dagegen eine zweyte Frage: was für Kräfte sind es, wodurch dem Körper eine fortgehende Bewegung ertheilt werden kann?

Um diese zu beantworten, denke man sich den ganzen Körper, dessen Masse $= M$ seyn mag, in lauter gleiche Elemente, jedes $= m$ getheilt, und setze, auf jedes dieser Elemente wirke eine gleich große Kraft p nach einer Richtung; so werden sie insgesammt zu gleicher Zeit nach dieser gemeinschaftlichen Richtung mit gleicher Geschwindigkeit fdt fortgehen, d. h. der ganze Körper wird dadurch eine fortgehende Bewegung erhalten, deren Geschwindigkeit $=$ fdt ist.

§. 30.

In der Statik ist §. 74. gezeigt worden, daß einem solchen Systeme von Elementarkräften ihre Summe, nach eben der Richtung auf den Schwerpunkt des Körpers angebracht, äquipollent sey, oder eben das thue, was durch alle diese Kräfte in Verbindung bewirkt wird.

Diese Kraft setzt also den Körper ebenfalls in eine fortgehende Bewegung, und ertheilt ihm eben die Geschwindigkeit fdt, die seine Elemente, jedes durch die einzelne Kraft p getrieben, gemeinschaftlich erhalten würden.

§. 31.

Da im vorhergehenden Falle (§. 29.) der Kräfte p so viele auf den Körper wirken müssen, als gleiche Elemente m in ihm enthalten sind, so ist ihre Anzahl $= \frac{M}{m}$, folglich ihre Summe $= \frac{Mp}{m}$.

Demnach erhält der ganze Körper durch die Kraft $\frac{Mp}{m}$, die man auf seinen Schwerpunkt wirken läßt, die Geschwindigkeit fdt, wofern man der Kraft p eben diese Wirkung auf das einfache Element m zueignet. Hieraus fließen folgende zwey Sätze:

§. 32.

I. Die Geschwindigkeiten fdt und gdt, die zwey Kräfte P und Q einerley Masse im ersten Augenblicke der Wirkung ertheilen, wenn sie auf den Schwerpunkt derselben angebracht werden, verhalten sich wie diese Kräfte.

Beweis. 1) Um einem Elemente m dieser Masse die Geschwindigkeit fdt zu ertheilen, sey die Kraft p erforderlich, so ist $P = \frac{Mp}{m}$, also $p = \frac{mP}{M}$.

2) Um eben dem Elemente die Geschwindigkeit gdt zu ertheilen, sey die Kraft q nöthig, so hat man: $Q = \frac{Mq}{m}$, also $q = \frac{mQ}{M}$; und außerdem ist

3) $p : q = fdt : gdt$ §. 21.), folglich auch:

$$\frac{mP}{M} : \frac{mQ}{M} = fdt : gdt, \text{ oder:}$$

$$P : Q = fdt : gdt.$$

§. 33.

II. Zwey Kräfte P und Q, die verschiedene Massen M und N einerley Geschwindigkeit fdt ertheilen sollen, müssen mit diesen Massen in einerley Verhältnisse stehen.

Denn wenn die Kraft p eben diese Geschwindigkeit fdt dem Elemente m ertheilt, so ist $P = \frac{Mp}{m}$ (§. 31.), und $Q = \frac{Np}{m}$, also $P : Q = M : N$.

§. 34.

Lehrsatz. Wenn die Kraft P der Masse M im ersten Zeittheilchen dt die Geschwindigkeit fdt, und die Kraft Q der Masse N in eben dem Zeittheilchen die Geschwindigkeit gdt ertheilt, so ist

$$P : Q = Mf : Ng.$$

Beweis. 1) Es erhalte die Masse M von einer dritten Kraft R die Geschwindigkeit gdt, so ist

$P : R = f : g$ (§. 32.); ferner ist:

2) $R : Q = M : N$ (§. 33.), folglich

2) $P : Q = Mf : Ng$.

§. 35.

Wenn die Kraft P ihre Wirkung auf die Masse M ununterbrochen eine bestimmte Zeit t hindurch fortsetzt, so bekommt diese dadurch die Geschwindigkeit ft (§. 23.). Eben so bekommt die Masse N in eben der Zeit durch die Kraft Q die Geschwindigkeit gt; nennen wir also erstere $= u$, letztere $= v$, so wird:

$u : v = f : g$, folglich

$Mu : Nv = Mf : Ng$, mithin:

$Mu : Nv = P : Q$, oder:

$$u : v = \frac{P}{M} : \frac{Q}{N}.$$

welches so viel sagen will:

Zwey Kräfte, die auf zwey verschiedene Massen einerley Zeit hindurch fortdauernd wirken, ertheilen ihnen Geschwindigkeiten, die sich direkt wie die Kräfte, und verkehrt wie die Massen verhalten.

Von der Schwere und dem freyen Falle der Körper.

§. 36.

Um demnach bestimmen zu können, welche Geschwindigkeit ein Körper durch eine gegebene Kraft von Zeit zu Zeit erhalte, die ihn beständig nach einerley Richtung forttreibt, muß man zuvörderst wissen, wie viel Masse der Körper in sich vereinige. Dazu dient nun unstreitig am angemessensten sein Gewicht, als das Aggregat aller der Kräfte, wodurch die einzelnen Elemente des Körpers vermöge ihrer Schwere vertikal herabwärts getrieben werden, der Menge seiner materiellen Theilchen, oder seiner ganzen Masse proportional ist, so daß 1) zu gleichen Gewichten gleiche Massen gehören, und 2) bey Körpern von verschiedenen Gewichten durch das Verhältniß derselben zugleich das Verhältniß ihrer Massen angegeben wird.

§. 37.

Da das Gewicht des Körpers als eine einfache, auf seinen Schwerpunkt wirkende, Kraft betrachtet werden kann (Statik §. 75.), so ertheilt es ihm, wofern keine Hindernisse auf seinem Wege anzutreffen sind, eine fortrückende Bewegung nach herabwärtsgehender vertikaler Richtung, die man das **freye Fallen** des Körpers nennt. Es ist einleuchtend, daß diese Bewegung zu den gleichförmig beschleunigten gehören müsse, weil der Körper während derselben in jedem Augenblicke der Wirkung der Schwere eben so ausgesetzt ist, wie er sie im ruhenden Zustande, oder indem er getragen wird, durch den Druck äußert, den er gegen seine Unterlage ausübt. Auch stimmen hiermit alle Erfahrungen so genau überein, als es die Umstände, unter denen sie angestellt werden können, zulassen.

§. 38.

Wir wollen nun setzen, ein Körper, dessen Masse $= M$, und dessen Gewicht $= P$ ist, falle im luftleeren Raume während einer Zeit t zu einer Tiefe $= y$ herab, und habe zu Ende dieser Zeit die Geschwindigkeit $= u$ bekommen; ein anderer Körper, dessen Masse $= N$, und Gewicht $= Q$ ist, falle in eben der Zeit t zu einer Tiefe $= z$, und seine Geschwindigkeit sey alsdann $= v$, so ist

1) nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung (§. 15. 5.) $2y = ut$, $2z = vt$. Ferner

2) $u : v = \frac{P}{M} : \frac{Q}{N}$ (§. 35.), und

3) $P : M = Q : N$ (§. 36.), oder $\frac{P}{M} = \frac{Q}{N}$; daher $u = v$, und folglich auch $y = z$.

Hieraus folgt also: daß das freye Fallen der Körper von ihrer Masse unabhängig sey, oder daß der eine

Körper in eben der Zeit eben so tief falle, als der andere. Durch Versuche, deren Gründe sich hier noch nicht erörtern lassen, hat man gefunden, daß der Fallraum der Körper in der ersten Sekunde 15,09568 pariser Fuß betrage, welches nach rheinl. Maaße ungefähr 15,625 Fuß ausmacht. Diesen Raum wollen wir ins Künftige mit dem Buchstaben g bezeichnen.

§. 39.

1. Ein Körper, der aus der Ruhe frey herabfällt, legt demnach in einer Zeit von t Sekunden den Raum $s = gt^2$ zurück, und erlangt zu Ende dieser Zeit die Geschwindigkeit $v = 2gt$ (§. 15.).

2. Hieraus wird $s = \frac{v^2}{4g}$, und gegenseitig $v = 2\sqrt{gs}$. Es sind also auch s und v von einander abhängig, oder wenn man weiß, wie tief ein Körper gefallen ist, der Anfangs in Ruhe war, so bestimmt dies zugleich die Geschwindigkeit, die er zuletzt bekommen hat, ohne daß man dabey die Zeit des Fallens in Betracht zu ziehen braucht.

3. Wegen dieser Beziehung zwischen s und v nennt man v, die **der Fallhöhe** s **zugehörige Geschwindigkeit**, und gegenseitig s die **der Geschwindigkeit** v **zugehörige Fallhöhe.**

Anmerk. Man setze den Raum, durch den die Schwere den Körper in jedem Zeittheilchen dt fortbewegt, $= \varkappa dt^2$, so ist dies die Tiefe, zu der er sogleich im ersten dt herabsinkt. Um eben so viel sinkt er also vermöge seiner Trägheit auch im zweyten dt, und wird zugleich von der Schwere noch um $\varkappa dt^2$ weiter getrieben, so daß er in diesem Zeittheilchen den Weg $2\kappa dt^2$ zurücklegt. Auf gleiche Art ist sein Fallraum im dritten $dt = 3\kappa dt^2$, und überhaupt im nten $= n\kappa dt^2$, weil ihm die Schwere in jedem folgenden dt um κdt^2 weiter forttreibt.

Wenn man alle diese kleinen Räume zusammennimmt, so erhält man für die Tiefe, zu der der Körper in der Zeit ndt herabgesunken ist, $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \kappa dt^2$. Diese setze man $= s$, und die Zeit $ndt = t$, so wird $n^2dt^2 = t^2$, also $s = \frac{1}{2}n^2\kappa dt^2 + \frac{1}{2}n\kappa dt^2 = \frac{1}{2}\kappa t^2 + \frac{1}{2}\kappa t dt$; wovon letzterer Theil gegen den erstern wegfällt.

Da nun auch $s = gt^2$, so bekommt man $\kappa = 2g$, mithin für den Raum, durch den die Schwere den Körper in jedem dt forttreibt, $2gdt^2$.

Aus dieser Betrachtung erhellet, daß die Formel $s = gt^2$ nur alsdann vollkommen richtig sey, wenn man berechtigt ist, den Theil $\frac{1}{2}\kappa t dt = gtdt$ als eine Größe, die sich nicht angeben läßt, aus ihr wegzulassen. Gesetzt aber, es würde in der Folge einmal entdeckt, daß die Schwere eigentlich nicht kontinuirlich, sondern von Zeit zu Zeit durch Impulse auf den Körper wirke, so bekäme das Zeittheilchen dt einen endlichen, wenn gleich sehr geringen, Werth, und die gedachte Formel bliebe alsdann selbst für ein endliches t nicht mehr ganz richtig. Um wie viel sie aber in diesem Falle von der Wahrheit abweiche, ließe sich leicht aus dem weggelassenen Gliede $gtdt$ beurtheilen.

§. 40.

Wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er anfängt zu fallen, schon eine Geschwindigkeit c nach vertikal herabwärts gehender Richtung hat, so erlangt er in der Zeit t die Geschwindigkeit $c + 2gt$, und legt während derselben den Raum $ct + gt^2$ zurück (§. 14.).

§. 41.

Aufgabe. Ein Körper wird in A mit der Geschwindigkeit c vertikal aufwärts geworfen; man sucht die Beschaffenheit seiner Bewegung.

Aufl 1) So lange der Körper steigt, wirkt ihm die Schwere beständig entgegen, und vermindert seine anfängliche Geschwindigkeit in der Zeit t um 2gt.

2 Seine Geschwindigkeit v zu Ende dieser Zeit ist also noch $= c - 2gt$, und die Höhe AP, zu der er dann gestiegen ist, $= ct - gt^2$.

3) Nach Verlauf der Zeit $t = \frac{c}{2g}$ ist $v = 0$; also hört der Körper nun auf, ferner zu steigen, und hat folglich seine größte Höhe erreicht.

4) Diese Höhe ist $= \frac{c^2}{4g}$, oder eben so groß, als die Fallhöhe, die der Geschwindigkeit c zugehört (§. 39. 3.).

5) Seine fernere Bewegung ist nun wieder ein natürliches Fallen, wodurch er in der Zeit t′ die Geschwindigkeit $v' = 2gt'$ bekommt, und sich von B um die Tiefe gt'^2 entfernt.

6) Um zu sehen, mit welcher Geschwindigkeit er wieder in P gelangt, setze man

$$gt'^2 = BP = \frac{c^2}{4g} - ct + gt^2, \text{ so wird:}$$
$$4g^2t'^2 = c^2 - 4cgt + 4g^2t^2 = (c - 2gt)^2,$$
also $2gt' = c - 2gt$, oder

Der Körper erhält also beym Herabfallen an jeder Stelle P eben die Geschwindigkeit wieder, die er vorhin beym Heraufsteigen daselbst hatte.

7) Ferner hat man $t' = \frac{c}{2g} - t$. (6). Nun war $\frac{c}{2g}$ die Zeit, worin er bis B stieg; t die Zeit, worin er bis P stieg; folglich brachte er die Zeit $\frac{c}{2g} - t$ darauf zu, von P bis B zu steigen.

8) Die Zeiten also, worin der Körper von irgend einer Stelle P bis zu seiner größten Höhe steigt, und von da wieder bis zu P herabfällt, sind ebenfalls einander gleich.

9) Aus No. 6. und 7. erhellet endlich, daß der Körper in A mit seiner anfänglichen Geschwindigkeit c wieder anlangt, und eben die Zeit gebraucht hat, von A bis B zu steigen, als von B bis A herabzufallen.

Vergleichung anderer Kräfte mit der Schwere.

§. 42.

Die Wirkung der Schwere kennen wir also jetzt genau; wir wissen nemlich, daß sie einen Körper in jedem Zeittheilchen dt durch den Raum $2g dt^2$ treibt, und ihm dadurch nach und nach eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ertheilt, wobey er in der ersten Sekunde den Raum $g = 15{,}625$ rheinl. Fuß zurücklegt.

Um nun auch die Wirkung jeder andern Kraft auf eine gegebene Masse zu bestimmen, dürfen wir nur zwischen ihr und der Schwere eine Vergleichung anstellen, oder überhaupt die Schwere als Maaß bey andern Kräften zum Grunde legen. Zu dem Ende soll ins Künftige das Gewicht der Masse $=1$ zur allgemeinen Einheit der Kräfte dienen, wodurch Masse und Gewicht einerley wird: denn es sey das Gewicht der Masse $M = P$, so ist nach jener Festsetzung $1 : M = 1 : P$ (§. 36.), folglich $P = M$.

§. 43.

Aufgabe. Eine unveränderliche Kraft P wirkt fortdauernd auf den Schwerpunkt eines Körpers, dessen Masse $= M$ ist, nach einerley Richtung, und ertheilt ihm also eine fortgehende gleichförmig beschleunigte Bewegung. Man fragt, um wie viel der Körper in einer bestimmten Zeit t fortrücke, und welche Geschwindigkeit er zu Ende dieser Zeit erlangt habe.

Aufl. 1) Man setze den gesuchten Raum $= s$, die Geschwindigkeit $= u$, so ist nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung $s = \frac{1}{2} ut$ (§. 15. 5.).

2) Der Körper bekommt beym Fallen, oder durch die fortgesetzte Wirkung seines eigenen Gewichtes M, in der Zeit t die Geschwindigkeit 2gt. Setzt man also in §. 35. sowohl die Masse N, als die Kraft $Q = M$, und $v = 2gt$, so erhält man:

$$u : 2gt = \frac{P}{M} : 1, \text{ oder}$$

$$u = \frac{2gPt}{M}.$$

3) Und daraus wird $s = \frac{1}{2} ut = \frac{gPt^2}{M}$.

4) Hat der Körper zu Anfange der Zeit t nach

der Richtung der Kraft schon eine Geschwindigkeit $= c$, so wird zu Ende derselben $u = c + \frac{2gPt}{M}$ (§. 14.).

5) Ist dagegen die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit c der Richtung der Kraft entgegengesetzt, so wird die Bewegung des Körpers durch die Kraft verzögert, und es ist nach Verlauf der Zeit t seine Geschwindigkeit $u = c - \frac{2gPt}{M}$.

§. 44.

Aufgabe. Die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, der von einer schiefen Ebene herabgleitet. Fig. 2.

Aufl 1) Das Gewicht des Körpers, das wir $= M$ setzen wollen, wirkt unmittelbar aus seinem Schwerpunkte o nach der Vertikale ov. Weil aber der Körper gezwungen ist, sich längs der schiefen Ebene CA zu bewegen, so zerlege man sein Gewicht in zwey Kräfte P und Q nach den Richtungen op und oq, wovon erstere mit der Ebene parallel, letztere senkrecht darauf ist.

2) Setzt man den Neigungswinkel der Ebene $CAB = I$, so wird $P = M \operatorname{Sin} I$, $Q = M \operatorname{Cos} I$.

3) Letztere drückt gegen die Ebene senkrecht, und wird also dadurch aufgehoben, so daß sie zur Bewegung des Körpers nichts beytragen kann.

4) Durch erstere hingegen bekommt der Körper, weil ihre Richtung durch seinen Schwerpunkt geht, eine

fortgehende Bewegung, die zugleich wegen der Unveränderlichkeit der Kraft gleichförmig beschleunigt ist.

5) Man hat nun hier $\frac{iP}{M} = \text{Sin } I$; also durchläuft der Körper mit der Zeit t längs der Ebene den Raum $gt^2 \text{ Sin } I$, und erlangt zu Ende dieser Zeit die Geschwindigkeit $2gt \text{ Sin } I$.

§. 45.

1. Indem der Körper auf der schiefen Ebene den Raum $CA = gt^2 \text{ Sin } I$ zurücklegt, sinkt er zugleich unter den Anfangspunkt C seiner Bewegung zur Tiefe $CB = CA \text{ Sin } I = gt^2 \text{ Sin } I^2$. Zu eben der Tiefe würde er also auch in der Zeit $t \text{ Sin } I$ frey herabgefallen seyn, und würde dadurch in B eben die Geschwindigkeit $2gt \text{ Sin } I$ erlangt haben.

Ein Körper bekommt also einerley Geschwindigkeit, wenn er zu irgend einer vertikalen Tiefe herabsinkt; er mag sie entweder unmittelbar durchs Fallen, oder durch das Herabgleiten auf einer schiefen Ebene erreichen.

2. Es sey z der Fallraum für eine gegebene Zeit t; s der Raum, durch den ein Körper in eben der Zeit längs der schiefen Ebene CA herabgleitet, so hat man $z = gt^2$, und $s = gt^2 \text{ Sin } I$, folglich $s = z \text{ Sin } I$.

Man fälle aus B auf AC das Perpendikel BD, so ist der Winkel $DBC = CAB = I$, also $DC = BC \text{ Sin } I$. Setzt man daher $BC = z$, so wird $DC = z \text{ Sin } I = s$.

Ein Körper legt auf der schiefen Ebene CA in eben der Zeit den Weg CD zurück, worin er durch den Raum BC herabfällt.

§. 46.

Fig. 3. **Aufgabe.** Ein Körper A, dessen Masse $= M$ ist, liegt auf horizontalem Boden. Ein Faden, der in seinem Schwerpunkte befestigt ist, und nach horizontaler Richtung über eine Rolle K geht, verbindet ihn mit einem Gewichte P, das frey an dem Faden herabhängt. Das Gewicht kann also nicht sinken, ohne den Körper zugleich mit fortzuziehen; man fragt nun, was für eine Bewegung beyde bekommen werden, wofern sich annehmen läßt, daß weder Friktion noch Widerstand der Luft hierbey in Betracht kommen?

Aufl. 1) Das Gewicht des Körpers A wird durch die horizontale Fläche, auf der er sich befindet, aufgehoben; also wirkt bloß auf ihn die Kraft, womit der Faden gespannt ist. Es sey diese $= T$, so durchläuft der Körper mit gleichförmig wachsender Geschwindigkeit in der Zeit t den Raum $\frac{gTt^2}{M}$ (§. 43.).

2) Auf die herabhängende Masse wirken hingegen zwey Kräfte zugleich: ihr Gewicht $= P$, und nach entgegengesetzter Richtung die Spannung des Fadens $= T$, also bleibt ihr zum Herabsinken noch die Kraft $P - T$ übrig.

3) Vermöge dieser Kraft gelangt sie mit gleich-

förmig zunehmender Geschwindigkeit in der Zeit t zu einer Tiefe $= gt^2 \left(\frac{P - T}{P}\right) = gt^2 \left(1 - \frac{T}{P}\right)$.

4) Da nun Körper und Gewicht wegen ihrer Verbindung in einerley Zeit um gleich viel fortrücken müssen, so hat man:

$$gt^2 . \left(1 - \frac{T}{P}\right) = \frac{gt^2 T}{M} \text{ oder}$$

$$1 - \frac{T}{P} = \frac{T}{M}.$$

5) Daher wird $1 = T\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{P}\right) = \frac{T(M+P)}{MP}$; folglich $T = \frac{MP}{M+P}$.

6) Also der Raum, den beyde in der Zeit t zurücklegen, $= \frac{gTt^2}{M} = \frac{gPt^2}{M+P}$, und die Geschwindigkeit beyder zu Ende dieser Zeit $= \frac{2gPt}{M+P}$.

§. 47.

Unter den Hindernissen, die die eben betrachtete Bewegung verzögern können, ist das Reiben zwischen der Grundfläche des Körpers A, und dem Boden, worauf er fortgezogen wird, das beträchtlichste. Setzt man dies $= \lambda M$, und betrachtet den Coefficienten λ als unveränderlich, so ist $T - \lambda M$ die Kraft, die den Körper nach horizontaler Richtung forttreibt, folglich der Raum, den er in der Zeit t zurücklegt, $= gt^2 . (\frac{T - \lambda M}{M})$. Man erhält also jetzt:

$$1 - \frac{T}{P} = \frac{T}{M} - \lambda, \text{ oder}$$

$$1 + \lambda = \frac{T}{M} + \frac{T}{P} = \frac{T(M+P)}{MP}, \text{ folglich:}$$

$$T = \frac{(1+\lambda) MP}{M+P}.$$

Nennt man daher S den Raum, um den die Masse M in der Zeit t fortrückt, oder das Gewicht P herabsinkt, so wird: $S = (\frac{(1+\lambda) P}{M+P} - \lambda) . gt^2 = (\frac{P - \lambda M}{M+P}) gt^2$.

§. 48.

Aus dieser Formel erhält man gegenseitig:

$$\lambda = \frac{P}{M} - \frac{(M+P) S}{gMt^2}.$$

Wird also die Zeit genau beobachtet, in der das Gewicht P zu einer bestimmten Tiefe S herabsinkt, so läßt sich daraus bestimmen, wie viel der Reibungskoefficient λ bey wirklichen Bewegungen betrage.

Exempel. $M = 25\frac{3}{4}$ ℔, $P = 7$ ℔, $s = 55$ engl. Zoll, oder nach rheinl. Maaße $= 4{,}4515$ Fuß, $t = 4''$, giebt

$$\lambda = \frac{28}{103} - \frac{4{,}4515 \times 131}{15{,}625 \times 103 . 16} = 0{,}2718 - 0{,}0226 = 0{,}2492, \text{ also beynahe } \lambda = \frac{1}{4}.$$

Dies Exempel ist aus Herrn **Vince's** Abhandlung über die Friktion bewegter Körper genommen, die in den Phil. transactions. Vol. 75. pag. 176. steht. Es sind daselbst eine Menge anderer Versuche dieser Art angegeben, doch ohne weitere Nachricht, aus welchen Materien die Körper, die zu diesen Versuchen gewählt wurden, bestanden. Die Absicht des Verfassers scheint auch eigentlich nur gewesen zu seyn, zu bestimmen, ob die Friktion während der Bewegung unveränderlich sey, oder zugleich von der Geschwindigkeit abhänge. Nach ihm ist die erstere Voraussetzung allgemein richtig: denn er versichert, daß bey einerley M und P der Raum s sich jedesmal genau wie das Quadrat der Zeit t verhalten habe, wiewohl er die Belege zu diesen Resultaten nicht besonders mitgetheilt hat.

§. 49.

Stat. Fig. 38. **Aufgabe.** An einem Faden, der über eine Rolle C geht, hängen auf beyden Seiten zwey ungleiche Gewichte P und Q. Man sucht, wie das größere Gewicht Q sinken wird.

Aufl. 1) Es sey die Spannung des Fadens = T, so strebt das Gewicht Q mit der Kraft Q — T zu sinken, und das Gewicht P wird mit der Kraft T — P in die Höhe gezogen.

2) Da diese Kräfte unveränderlich sind, so erhalten beyde Gewichte eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, und zwar sinkt ersteres in der Zeit t zur Tiefe

$gt^2 \cdot (\frac{Q-T}{Q})$ herab, und letzteres steigt in eben der Zeit um $gt^2 \cdot (\frac{T-P}{P})$ in die Höhe.

3) Diese Räume müssen nun, weil die Gewichte mit einander verbunden sind, gleich groß seyn; also hat man

$$\frac{Q-T}{Q} = \frac{T-P}{P}, \text{ oder}$$

$$PQ - PT = QT - PQ.$$

4) Daher wird $(P - Q)\ T = 2PQ$, folglich $T = \frac{2PQ}{P+Q}$.

5) Substituirt man diesen Werth für T in den Ausdrücken (2), so wird der Raum s, durch den das Gewicht P in der Zeit t herauf, und das Gewicht Q herabsteigt, $= (\frac{P-Q}{P+Q}) gt^2$.

Exempel. Es sey $P = 18$ ℔, $Q = 22$ ℔, so wird $s = \frac{4}{40} gt^2 = \frac{1}{10} gt^2$. Die Tiefe also, wozu das schwere Gewicht in der ersten Sekunde herabsinkt, ist $= \frac{1}{10} g = 1{,}5625$ rheinl. Fuß.

Von den veränderlichen Kräften.

§. 50.

Aufgabe. Auf den Schwerpunkt einer gegebenen Masse M wirke fortdauernd nach einerley Richtung eine veränderliche Kraft P, die entweder von der dabey verflossenen Zeit, oder von dem Raume abhängen mag, den die Masse während derselben zurückgelegt hat; man sucht ihre Bewegung.

Aufl. 1) Es sey der Raum, den die Masse in der Zeit t durchlaufen ist, $= x$, die Geschwindigkeit, die sie zu Ende dieser Zeit bekommen hat, $= v$, so ist zuvörderst $v = \frac{dx}{dt}$ (§. 11.). Es kommt also nur darauf an, für jede Zeit t den Werth von v zu bestimmen.

2) Da sowohl die Kraft P, als die Geschwindigkeit v von der Zeit t abhängt, so leiden beyde mit ihr zugleich Aenderungen. Wir wollen setzen, die Kraft P bekomme für die Aenderung der Zeit $= \Delta t$ den Zuwachs $= \Delta P$, die Geschwindigkeit den Zuwachs $= \Delta v$, so ist ersterer nach Verlauf der Zeit $t + \Delta t = P + \Delta P$, letztere $= v + \Delta v$.

3) Bliebe die Kraft P während des Zeittheils Δt ungeändert, so würde der Körper von dem Augenblicke an, wo er die Geschwindigkeit v hat, mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fortgehen, und würde nach Verlauf der Zeit Δt die Geschwindigkeit $v + \frac{2gP\Delta t}{M}$ erhalten (§. 43. 4.).

4) Diese muß also nothwendig geringer als $v + \Delta v$ seyn, weil die Kraft während Δt noch gewachsen ist. Man hat folglich:

$$\Delta v > \frac{2gP\Delta t}{M}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} > \frac{2gP}{M}.$$

5) Wäre dagegen der Körper von eben dem Augenblicke an die Zeit Δt über der beständigen Wirkung der Kraft $P + \Delta P$ ausgesetzt, so bekäme er am Ende derselben die Geschwindigkeit $v + \frac{2g(P + \Delta P)\Delta t}{M}$.

6) Offenbar ist diese größer als $v + \Delta v$: denn die Kraft, die den Körper während Δt beschleunigt, ist ja erst zu Ende dieser Zeit zu $P + \Delta P$ völlig angewachsen, folglich innerhalb Δt beständig geringer als $P + \Delta P$. Man hat also ferner:

$$\Delta v < \frac{2g(P + \Delta P)\Delta t}{M}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2g(P + \Delta P)}{M}.$$

7) Der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ liegt daher stets innerhalb der Grenzen $\frac{2gP}{M}$ und $\frac{2g(P + \Delta P)}{M}$, und ist folglich von $\frac{2gP}{M}$ weniger verschieden, als um $\frac{2g\Delta P}{M}$.

8) Man lasse nun Δt unendlich abnehmen, so nimmt zugleich ΔP, folglich auch $\frac{2g\Delta P}{M}$ unendlich ab; also nähert sich $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ unendlich der Grenze $\frac{2gP}{M}$, weil beyder Unterschied allemal geringer als $\frac{2g\Delta P}{M}$ ist, mithin ebenfalls eine unendliche Abnahme leiden muß.

9) Zugleich aber nähert sich auch bey eben der Voraussetzung $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ unendlich der Grenze $\frac{dv}{dt}$; daher wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2gP}{M}.$$

10) Man erhält demnach durch Integrirung dieser Gleichung:

$$v = C + \frac{2g}{M}\int P dt$$

11) Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo die Kraft P nach und nach abnimmt, also für die Zeit $t + \Delta t = P - \Delta P$ wird. Diese Voraussetzung giebt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2gP}{M}, \text{ und}$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2g(P - \Delta P)}{M};$$

woraus wieder eben die Gleichung $\frac{dv}{dt} = \frac{2gP}{M}$ auf die nemliche Weise, wie (7) und (8), sich herleiten läßt.

§. 51.

I. Da $v = \frac{dx}{dt}$, so wird $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Dieser Werth für $\frac{dv}{dt}$ in der eben gefundenen Gleichung substituirt, giebt also:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M}.$$

eine Gleichung zwischen x, P und t, worin man x und P als Funktionen von t betrachtet, oder nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch: worin dt als beständig angenommen wird.

2. Es sey h die der Geschwindigkeit v zugehörige Fallhöhe (§. 39. 3.), so hat man $h = \frac{v^2}{4g}$, und wenn auf beyden Seiten differenzirt wird: $dh = \frac{vdv}{2g}$.

Nun ist $v = \frac{dx}{dt}$, und $dv = \frac{2gPdt}{M}$, also $vdv = \frac{2gPdx}{M}$; folglich wird: $dh = \frac{Pdx}{M}$, oder

$$Mdh = Pdx.$$

Diese Gleichung ist in manchen Fällen, vorzüglich da, wo die Kraft P unmittelbar von x abhängt, leichter anzuwenden, als die vorige.

§. 52.

Exempel. Wenn wir nach dem allgemeinen Gesetze der Gravitation annehmen, daß das Gewicht eines Körpers in einerley Vertikale sich verkehrt, wie das Quadrat seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde verhalte, so treibt ihn während seines Fallens eine veränderliche Kraft, die nach und nach zunimmt, so wie der Körper zu einer größern Tiefe gelangt. Es sey nemlich nach dieser Voraussetzung der Halbmesser der Erde $= a$, das Gewicht der Masse M in der Entfernung z von ihrem Mittelpunkte $= P$, an ihrer Oberfläche, oder für $z = a$, $= M$, wie im §. 42. festgesetzt ist, so erhält man $P : M = a^2 : z^2$, also $\frac{P}{M} = \frac{a^2}{z^2}$.

Man setze nun, der Körper befinde sich Anfangs über der Oberfläche der Erde in einer Höhe $= f$, so ist daselbst seine Entfernung von ihrem Mittelpunkte $= a + f$. Nachdem er zur Tiefe $= x$ herabgefallen ist, gehöre seine Geschwindigkeit der Fallhöhe $= h$ zu, so wird $z = a + f - x$, also: $dz = - dx$, folglich

$$dh = - \frac{Pdz}{M} = - \frac{a^2 dz}{z^2}$$

$$h = C + \frac{a^2}{z}$$

Für $z = a + f$ war des Körpers Geschwindigkeit, folglich auch h, $= 0$, also wird $C = \frac{-a^2}{a+f}$, oder

$$h = \frac{a^2}{z} - \frac{a^2}{a+f}.$$

Wenn der Körper den Boden erreicht, so ist $z = a$. Es werde alsdann $h = H$, so bekommt man

$$H' = a - \frac{a^2}{a+f} = \frac{af}{a+f}.$$

Die gewöhnliche Voraussetzung, daß in jeder Höhe $\frac{P}{M} = 1$ sey, giebt nun $H = f$; also um $f - \frac{af}{a+f} = \frac{f^2}{a+f}$ zu groß. Daß diese Abweichung auf jeden Fall außer Acht gelassen werden könne, wird folgendes Beyspiel zeigen:

Ein Aerostat sey über der Oberfläche der Erde zu einer Höhe von 1500 Toisen hinaufgestiegen. Man läßt aus ihm ein Gewicht von dieser Höhe herabfallen; es fragt sich, mit welcher Geschwindigkeit dies den Boden treffen werde?

Hier ist $f = 1500$, und wenn man für a den mittlern Werth $= 3275000$ Toisen annimmt; $\frac{f^2}{a+f}$ $= \frac{22500}{32765} = 0{,}687$; also $H = 1499{,}313$ Toisen $=$ $8995{,}878$ Fuß, und die gesuchte Geschwindigkeit $=$ $\sqrt{4gH} = 749{,}828$ Fuß. Dagegen gehört zur Höhe f die Geschwindigkeit $\sqrt{4gf} = 750{,}000$ Fuß

Differenz $= 0{,}172$ Fuß

die noch kein $\frac{1}{4000}$ von letzterer ausmacht.

§. 53.

Wenn im §. 50. der Körper Anfangs eine Geschwindigkeit c gegen die Richtung der Kraft P hat, so wird seine Bewegung durch die Kraft verzögert: er behält aber dabey seine anfängliche Richtung so lange, als ihm noch eine Geschwindigkeit nach derselben übrig bleibt.

1) Sie sey nach Verlauf der Zeit $t = v$; im nächsten Δt ändere sie sich um Δv, so wird sie für $t + \Delta t$ $= v + \Delta v$.

2) Eben so wird die Kraft für $t + \Delta t = P + \Delta P$, wo ΔP entweder positiv oder negativ ist, je nachdem P mit zunehmenden t wächst oder abnimmt.

3) Bliebe die Kraft während des Zeittheils Δt unverändert, so litte unterdeß v eine gleichförmige Abnahme, und würde zu Ende dieses Zeittheils $= v - \frac{2gP\Delta t}{M}$ (§. 43.)

4) Wirkte dagegen diese Zeit hindurch beständig die Kraft $P + \Delta P$ der Bewegung entgegen, so würde die Geschwindigkeit zu Ende derselben $= v - \frac{2g(P + \Delta P)\Delta t}{M}$.

5) Folglich fällt $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ innerhalb der Grenzen $-\frac{2gP}{M}$ und $-\frac{2g(P + \Delta P)}{M}$, und nähert sich ersterer Grenze unendlich, wenn man Δt unendlich abnehmen läßt.

6) Daher hat man $\frac{dv}{dt} = -\frac{2gP}{M}$, oder

$$Mdv = -2gPdt; \text{ also}$$

$$Mv = \text{Const} - 2g\int Pdt$$

wo das Integral $\int Pdt$ so genommen werden muß, daß es für $t = 0$ verschwindet.

7) Nun ist für $t = 0$, $v = c$; also Const $=$ Mc, mithin:

$$Mv = Mc - 2g\int Pdt.$$

§. 54.

Es seyen H, h die den Geschwindigkeiten c, v zugehörigen Fallhöhen, oder $H = \frac{c^2}{4g}$, $h = \frac{v^2}{4g}$, so wird $dh = \frac{vdv}{2g}, = -\frac{Pdt}{M} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{Pdx}{M}$, folglich

$$Mh = C - \int Pdx,$$

und da für $x = 0$, $v = c$, oder $h = H$ ist, so erhält man $C = MH$, wofern das Integral $\int Pdx$

so genommen wird, daß es für $x = o$ verschwindet; daher endlich:

$$Mh = MH - \int P dx.$$

Drittes Kapitel.

Von der fortgehenden Bewegung der Körper in krummen Linien.

---

§. 55.

Stat. Fig. 8. Der Schwerpunkt C eines Körpers bekomme durch die augenblickliche Wirkung einer Kraft p nach der Richtung CA die Geschwindigkeit $u = CA$, oder werde durch sie in eine gleichförmige Bewegung gesetzt, wobey er durch diesen Raum in einer Sekunde fortgeht (§. 8.); eine andere Kraft q ertheile ihm für sich allein nach der Richtung CB die Geschwindigkeit $v = CB$; ich behaupte, beyde Kräfte in Verbindung werden den Punkt nach der Diagonale CD des Parallelograms ACBD forttreiben, und ihm eine Geschwindigkeit geben, womit er in einer Sekunde den Weg CD zurücklegt.

Beweis. 1) Da zwey Kräfte sich wie die Geschwindigkeiten verhalten, die ~~ihnen~~ einerley Masse im ersten Augenblicke ihrer Wirkung ertheilen (§. 32.), so ist hier $p : q = u : v$, oder, wenn man CA statt u, und CB statt v setzt, $p : q = CA : CB$.

2) Die Seiten des Parallelograms ACBD sind also den Kräften p und q proportional, und die Richtung der mittlern Kraft, die ihnen äquipollent ist, geht folglich nach der Diagonale CD dieses Parallelograms.

3) Setzt man diese mittlere Kraft $= r$, so ist außerdem

$$p : q : r = CA : CB : CD,$$

und wenn w die Geschwindigkeit heißt, die der Punkt C durch sie erhält,

$$p : q : r = u : v : w,$$

$$\text{folglich } w = CD.$$

4) Weil nun r den Kräften p und q äquipollent ist, so ist ihre einfache Wirkung mit der zusammengesetzten Wirkung beyder einerley. Die Kräfte p und q bewirken also in Verbindung, daß der Punkt nach der mittlern Richtung CD fortgeht, und eine Geschwindigkeit $w = CD$ annimmt.

§. 56.

Folgerung. 1. Wenn also ein Punkt zu gleicher Zeit zwey Geschwindigkeiten u und v nach zweyen verschiedenen Richtungen CA und CB erhält, so bewegt er sich nach einer mittlern Richtung CD mit einer mittlern Geschwindigkeit w, die beyde folgendermaßen bestimmt werden:

$$w = \sqrt{(u^2 + 2uv \operatorname{Cos} ACB + v^2)}, \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} ACD = \frac{v \operatorname{Sin} ACB}{u + v \operatorname{Cos} ACB}.$$

2. Gegenseitig: wenn ein Punkt sich nach der

Richtung CD mit einer Geschwindigkeit w bewegt, so kann man diese als eine Zusammensetzung zweyer andern Geschwindigkeiten u und v nach den Richtungen CA und CB ansehen, und man hat für diese Voraussetzung (Stat. §. 55.): $u = \frac{w \operatorname{Sin} BCD}{\operatorname{Sin} ACB}$, und $v = \frac{w \operatorname{Sin} ACD}{\operatorname{Sin} ACB}$.

3. Es lassen sich demnach Geschwindigkeiten, wie Kräfte, zusammensetzen und zerlegen.

§. 57.

Hieraus wird nun begreiflich, wie eine Kraft mit der bisher betrachteten Wirkungsart, die Geschwindigkeit eines Körpers zu ändern, noch eine zweyte verbinden könne, ihn zugleich von seiner Richtung abzulenken. Fig. 4. Man setze: der Körper habe in dem eben verflossenen Zeittheile Δt mit einer vorhin erhaltenen Geschwindigkeit u den Raum $fm = u\Delta t$ zurückgelegt, und sey jetzt im Begriff das nächste Δt hindurch vermöge seiner Trägheit einen eben so großen Raum mo nach eben der Richtung zu durchlaufen; es wirke aber auf ihn in m eine Kraft nach einer Richtung mp, die von der seinigen verschieden ist, und ertheile ihm nach dieser eine Geschwindigkeit v. Der Erfolg hiervon wird seyn, daß der Körper nach keiner von beyden Richtungen, weder nach mo, die er vorhin hatte, noch nach mp, wohin ihn die Kraft treibt, fortgeht, sondern statt deren eine mittlere Richtung, und eine Geschwindigkeit bekommt, die aus u und v zusammengesetzt ist. Macht man nemlich mp $= v\Delta t$, so sind mo und mp die Räume, die er in einerley Zeit, erstern vermöge seiner Trägheit, letztern vermöge der Wirkung der Kraft, durchlaufen würde; er nimmt also seinen Weg nach der Diagonale mn des Parallelograms monp, und beschreibt in derselben Zeit Δt das Stück mn, so daß also sowohl seine Richtung, als seine Geschwindigkeit durch die Kraft verändert wird.

§. 58.

Aufgabe. Auf den Schwerpunkt eines Körpers, dessen Masse $=$ M ist, wirken fortdauernd drey Kräfte P, Q und R nach Richtungen, die beständig mit den dreyen auf einander senkrechten Linien OA, OB und OC parallel sind. Man sucht für eine gegebene Zeit t seinen Ort, und die Geschwindigkeit an demselben.

Fig. 5. **Aufl.** 1) Es sey zu Anfange der Bewegung der Schwerpunkt des Körpers in A, nach Verlauf der Zeit t in m, und seine Geschwindigkeit daselbst $= v$. Um die Lage des Punktes m zu bestimmen, fälle man aus ihm auf die Ebene AOB das Perpendikel mq, und aus q auf OA, in dieser Ebene selbst, das Perpendikel qp, und setze die drey rechtwinklichten Koordinaten Op $=$ x, pq $=$ y, qm $=$ z. Außerdem sey noch der durchlaufene Raum des Körpers Om $=$ s; so sind x, y, z, s und v Größen, die sich mit der Zeit t zugleich ändern, also von dieser gemeinschaftlich abhängen;

gen; so wie dies auch bey den Kräften P, Q und R der Fall seyn mag.

2) Wenn daher in zweyen folgenden gleich großen Zeittheilchen Δt der Schwerpunkt des Körpers aus m nach m′ und m″ fortrückt, so wachsen die Größen x, y z und s im nächsten Δt um Δx, Δy, Δz und Δs, und im folgenden Δt um $\Delta\,(x + \Delta x) = \Delta x + \Delta^2 x$, $\Delta y + \Delta^2 y$, $\Delta z + \Delta^2 z$ und $\Delta s + \Delta^2 s$. Zugleich ist im m′ die Geschwindigkeit des Körpers $= v + \Delta v$, und die drey Kräfte P, Q und R werden daselbst $= P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$ und $R + \Delta R$.

3) Man nehme zuerst an: diese Kräfte wirken von Zeit zu Zeit durch Impulse auf den Körper, und zwar jedesmal zu Anfange eines Zeittheils Δt, oder in den einzelnen Punkten seines Weges m, m′, m″ u. s. w.; so durchläuft der Körper jeden der kleinen Räume mm′, m′m″ u. s. w. gleichförmig, und nach einerley Richtung; es wird also $\Delta s = v\Delta t$, $\Delta s' = v'\Delta t$, oder $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, $v' = \frac{\Delta s'}{\Delta t}$.

4) Zerlegt man demnach die Geschwindigkeit v in eine nach mv, der Verlängerung von qm, oder parallel mit OC, und in eine darauf senkrechte nach mr, so wird erstere $= \frac{\Delta s}{\Delta t} \operatorname{Sin} m'mr = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{mv}{mm'} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, letztere $= \frac{\Delta s}{\Delta t} \operatorname{Cos} m'mr = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{mr}{mm'} = \frac{mr}{\Delta t} = \frac{qq'}{\Delta t}$, welche noch in eine nach qo, oder parallel mit OA $= \frac{qq'}{\Delta t}$,

$\text{Cos } q'qo = \frac{qq'}{\Delta t} \cdot \frac{qo}{qq'} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, und in eine, parallel mit $OB, = \frac{qq'}{\Delta t} \text{ Sin } q'qo = \frac{qq'}{\Delta t} \cdot \frac{oq'}{qq'} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ zerfällt.

5) Eben so giebt die Geschwindigkeit v' nach den mit OA, OB und OC parallelen Richtungen die drey Geschwindigkeiten: $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t}$, und $\frac{\Delta z'}{\Delta t}$.

6) Also ändern sich die Geschwindigkeiten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ die der Körper nach den drey Richtungen OA, OB und OC hat, während er sich durch mm' bewegt, im nächsten Δt in $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z'}{\Delta t}$ um.

7) Hätte in m keine Kraft auf ihn gewirkt, so würde er in diesem folgenden Zeittheile vermöge seiner Trägheit eben den Raum Δs nach eben der Richtung mm' zurückgelegt haben; es würden daher auch seine Geschwindigkeiten nach OA, OB, OC noch dieselben geblieben seyn. Die Aenderungen also, die sie in m erleiden, sind bloß Wirkungen der Kräfte $P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$, $R + \Delta R$, die den Körper nach diesen Richtungen daselbst aufs neue beschleunigen.

8) Daher sind die Unterschiede $\frac{\Delta x'}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t} - \frac{\Delta y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z'}{\Delta t} - \frac{\Delta z}{\Delta t}$, oder $\frac{\Delta^2 x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta^2 z}{\Delta t}$, die

Geschwindigkeiten, die der Körper in m durch jene Kräfte unmittelbar bekommen hat.

9) Gesetzt nun, die Schwere wirkte beym Fallen der Körper auf eben die Art, wie vorhin (3) angenommen ist, so ertheilte sie bey jedem Impulse dem Körper die Geschwindigkeit $= 2g\Delta t$ (§. 39. Anmerk.); dem zu Folge ertheilen ihm also die Kräfte $P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$ und $R + \Delta R$ nach ihren Richtungen die Geschwindigkeiten $\frac{2g\Delta t\,(P + \Delta P)}{M}$, $\frac{2g\Delta t\,(Q + \Delta Q)}{M}$ und $\frac{2g\Delta t\,(R + \Delta R)}{M}$.

10) Da diese mit den vorigen (8) einerley seyn müssen, so erhält man

$$\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(P + \Delta P)}{M},$$
$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(Q + \Delta Q)}{M},$$
$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(R + \Delta R)}{M}.$$

11) Wegen der Bedingung, daß die Kräfte P, Q und R kontinuirlich auf den Körper wirken sollen, sind nun diese Gleichungen allemal fehlerhaft, so bald man dem Zeittheile Δt irgend einen bestimmten Werth beylegt; man sieht aber leicht, daß sie der Wahrheit desto näher kommen müssen, je kleiner man darin Δt annimmt.

12) Daraus folgt demnach, daß man die völlig richtigen Gleichungen der Aufgabe erhalte, wenn man

für die Ausdrücke, die in jenen vorkommen, die Grenzen substituirt, denen sie sich bey unendlicher Abnahme von Δt unendlich nähern. Daher wird

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2gP}{M},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2gQ}{M},\ \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{2gR}{M},$$ und außerdem bekommt man (3) $v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dt}$, woraus sich alles herleiten läßt, was man von der Bewegung des Körpers zu wissen verlangt.

§. 59.

1. Da die Punkte m, m′, m″ unendlich nahe zusammenrücken, so ändert der Schwerpunkt des Körpers jeden Augenblick seine Richtung, und bewegt sich also in einer Linie, von der kein Theil, so klein man ihn auch annehmen mag, gerade ist; d. h. er beschreibt eine Kurve. Die Beschaffenheit dieser Kurve zu finden, dienen die drey ersten Gleichungen (12), die zu der Absicht durch gegenseitige Verbindung auf zwey andere zurückgeführt werden müssen, worin bloß die drey Koordinaten x, y und z vorkommen.

2) Aus der Gleichung für die Geschwindigkeit des Körpers:

$$v^2=\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}$$

erhält man durchs Differenziiren:

$$vdv=\frac{dxd^2x}{dt^2}+\frac{dyd^2y}{dt^2}+\frac{dzd^2z}{dt^2},$$

und darin für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ die Werthe aus (12) substituirt, giebt

$$v dv = \frac{2g}{M}(Pdx + Qdy + Rdz);$$

woraus sich v für jeden Ort des Körpers vermittelst der Koordinaten x, y und z bestimmen läßt.

3. Bezeichnete man durch x, y und z die Räume, die der Körper während der Zeit t nach OA, OB oder OC zurücklegen würde, wenn ihn die Kraft P, Q oder R allein forttriebe, so bekäme man für die Aenderungen dieser Räume (§. 51. 1.) eben die Gleichungen, wie im §. 58. 12. Hieraus erhellet also, daß von den drey Kräften jede einzeln genommen nach ihrer Richtung eben die Wirkung auf den Körper hervorbringt, als wenn die andern beyden gar nicht vorhanden wären.

4. Für den einfachern Fall, wo auf den Körper nur zwey Kräfte P und Q während seiner Bewegung wirken, deren Richtungen in der Ebene AOB liegen, und mit OA und OB parallel sind, wird $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, also $\frac{dz}{dt} = c$. Wofern nun die Richtung der anfänglichen Bewegung des Körpers gleichfalls in die Ebene AOB fällt, so ist $c = 0$, also $\frac{dz}{dt} = 0$, und folglich auch $z = 0$, weil sich der Körper zu Anfange in O befindet. Daher liegt alsdann die ganze Bahn des Körpers in dieser Ebene, oder ist eine Kurve von einfacher Krüm-

mung, die bloß durch eine Gleichung zwischen den beyden Koordinaten x und y bestimmt wird.

5. Für seine Geschwindigkeit hat man in diesem Falle

$$v dv = \frac{2g}{M}(Pdx + Qdy).$$

Bewegung des Körpers auf vorgeschriebenem Wege.

§. 60.

Fig. 6. Es sey AMD ein gekrümmter Kanal in einer horizontalen, oder andern beliebigen Ebene ABD; ein Körper, dessen Masse $= M$ ist, bekomme in A die Geschwindigkeit $= c$ nach der anfänglichen Richtung des Kanales, und bewege sich nun, ohne daß äußere Kräfte weiter auf ihn wirken, innerhalb demselben fort.

Da der Körper gezwungen ist, seinen Weg nach der Kurve AMD zu nehmen, so übt er fortdauernd einen Druck senkrecht gegen die Wand des Kanales aus, und leidet also von dieser einen eben so großen Gegendruck, wovon wir annehmen wollen, daß seine mittlere Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers gehe, so daß dessen Bewegung längs dem Kanale beständig fortgehend bleibt.

Man setze diesen Druck für irgend eine Stelle M, wohin der Körper nach Verlauf einer Zeit t gelangt seyn mag, $= \Pi$, und zerlege ihn, da er nach der Normale Mr gerichtet ist, in einen nach Mo, parallel mit

$AB, = \Pi \text{ Cos } rMo = \Pi \text{ Sin } mMo = \Pi \,.\, \frac{dy}{ds}$, und in einen darauf senkrechten nach $MP = \Pi$ Cos $mMo = \Pi \,.\, \frac{dx}{ds}$, so hat man hier

$$P = \frac{\Pi dy}{ds},\ Q = -\frac{\Pi dx}{ds},\ R = o, \text{ also}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g\Pi dy}{Mds}, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2g\Pi dx}{Mds}.$$

Ferner (§. 59. 5.) $v dv = \frac{2g\Pi}{M}(dxdy - dxdy)$ $= o$, mithin $\frac{1}{2}v^2 = A$, $v = \sqrt{2A} = c$.

Der Körper behält also während der ganzen Zeit, da er sich an der Kurve AMD fortbewegt, seine anfängliche Geschwindigkeit unverändert bey.

Um den Druck Π zu bestimmen, substituire man in den beyden erstern Gleichungen für dt seinen Werth $\frac{ds}{c}$, so bekommt man $\frac{c^2d^2x}{ds^2} = \frac{2g\Pi dy}{Mds}$, und $\frac{c^2d^2y}{ds^2} = -\frac{2g\Pi dx}{Mds}$. Ferner setze man den Winkel Mmo, den die Tangente an M mit der Ordinate mp macht, $= \varphi$, und den Krümmungshalbmesser an eben der Stelle $= r$; so wird $r = \frac{ds}{d\varphi}$, $\frac{dx}{ds} = \text{Sin } \varphi$, $\frac{dy}{ds} = \text{Cos } \varphi$, und, weil $ds = cdt$, also ds ebenfalls unveränderlich ist, $\frac{d^2x}{ds} = \text{Cos } \varphi d\varphi$, folglich:

$= \frac{2g\Pi dy}{c^2 Mds} = dy$

$$\frac{c^2 d^2 x}{ds^2} = \frac{c^2 \operatorname{Cos} \varphi d\varphi}{ds} = \frac{2g\Pi \operatorname{Cos} \varphi}{M}, \text{ oder}$$

$$\Pi = \frac{Mc^2 d\varphi}{2gds} = \frac{Mc^2}{2gr}.$$

Eben diesen Werth für Π erhält man auch, wenn man statt der hier gebrauchten erstern Gleichung die zweyte nimmt.

§. 61.

Wir wollen setzen, die Kurve AMD sey ein Kreis; so ist r der Halbmesser dieses Kreises, folglich der Druck Π unveränderlich, und da seine Richtung auf dem Umfange des Kreises senkrecht ist, so geht sie, rückwärts verlängert, durch seinen Mittelpunkt.

Ein Körper also, der in einem Kreise fortzugehen genöthigt ist, und dabey von keiner fremden Kraft getrieben wird, bewegt sich nicht allein gleichförmig in demselben, sondern hat auch stets einerley Bestreben, sich nach der Richtung des Halbmessers vom Mittelpunkte des Kreises zu entfernen. Man nennt dies Bestreben seine **Schwungkraft**.

Es sey z. B. die Masse des Körpers = 1 ℔, seine Geschwindigkeit = 5 Fuß, der Halbmesser des Kreises = 8 Fuß, so ist seine Schwungkraft $\frac{Mc^2}{2gr} = \frac{25}{31\frac{1}{4} \cdot 8} = \frac{1}{10}$ ℔.

§. 62.

Aufgabe. Indem der Körper sich längs der

Kurve AMD hinbewegt, wirke auf ihn fortwährend eine Kraft V nach seiner jedesmaligen Richtung, oder nach der Tangente der Kurve, durch den Punkt gezogen, woselbst der Körper sich befindet. Man sucht für eine gegebene Zeit t seine Geschwindigkeit v, und den Druck Π, den er gegen die Schranken des Weges ausübt.

Aufl. 1) Man zerlege die Kraft V in eine nach der Richtung Mo $= V \text{ Cos mMo} = V \cdot \frac{dx}{ds}$, und in eine darauf senkrechte nach PM $= V \text{ Sin mMo} = V \cdot \frac{dy}{ds}$.

2) Zu diesen addire man noch die Kräfte $\Pi \cdot \frac{dy}{ds}$ und $-\Pi \cdot \frac{dx}{ds}$, worin nach eben den Richtungen der normale Gegendruck Π zerfällt, den der Körper von der Seitenwand des Kanales leidet, so erhält man:

$P = V \cdot \frac{dx}{ds} + \Pi \cdot \frac{dy}{ds}$, $Q = V \cdot \frac{dy}{ds} - \Pi \frac{dx}{ds}$, und $R = 0$, also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g\,(Vdx + \Pi dy)}{Mds}, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g\,(Vdy - \Pi dx)}{Mds}.$$

3) Außerdem wird (§. 59. 5.) $vdv = \frac{2gV\,(dx^2 + dy^2)}{Mds} = \frac{2gVds}{M}$, oder, wenn man für v seinen Werth $\frac{ds}{dt}$ setzt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2gV}{M}.$$

Der Körper wird also auf seinem krummlinigten Wege durch die Tangentialkraft V eben so beschleunigt, als wenn er nach unveränderter Richtung von ihr getrieben, in gerader Linie fortginge (§. 50. 9.).

4) Man multiplicire ferner die erstere der beyden Gleichungen (2) durch dy, die letztere durch dx, und subtrahire sie dann von einander, so bleibt:

$$\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dt^2} = \frac{2g\Pi(dy^2 + dx^2)}{Mds} = \frac{2g\Pi ds}{M}.$$

Hiervon ist das Glied linker Hand $= \frac{dy^2}{dt^2}$ $\left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^2}\right) = \frac{dy^2}{dt^2} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right)$, und wenn man, wie im §. 60. den Winkel Mmo $= \varphi$ setzt, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}$. $\frac{ds}{dt} = v \operatorname{Cos} \varphi$; $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d \operatorname{tang} \varphi = \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^2}$; also $\frac{dy^2}{dt^2} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right) = v^2 d\varphi = \frac{2g\Pi ds}{M}$, mithin wird:

$$\Pi = \frac{Mv^2 d\varphi}{2gds} = \frac{Mv^2}{2gr}.$$

Der normale Seitendruck des Körpers verhält sich demnach wie das Quadrat seiner Geschwindigkeit, und verkehrt, wie der Krümmungshalbmesser des Weges an der Stelle, wo der Körper sich befindet. Eben dies folgt auch schon aus §. 60., da offenbar die Tangentialkraft auf den gedachten Druck weiter keinen Einfluß haben kann, als nur insofern sie die Geschwindigkeit des Körpers ändert.

§. 63.

Aufgabe. Es liege jetzt die Kurve AMD in einer vertikalen Ebene. Ein Körper, dessen Masse $= M$ ist, wird in A darauf gelegt, und sinkt nun vermöge seines Gewichtes längs derselben hinab; man sucht für eine gegebene Zeit t seinen Ort M, und die Geschwindigkeit, die er daselbst erlangt hat.

Aufl. 1) Man ziehe durch A die vertikale Abscissenlinie AB, fälle darauf MP senkrecht, und setze $AP = x$, $PM = y$. Ferner nenne man den Druck, den der Körper nach der Normale der Kurve rM leidet, $= \Pi$, so zerfällt dieser nach den Richtungen oM und PM in die beyden Kräfte $\Pi \frac{dy}{ds}$ und $\Pi \frac{dx}{ds}$.

2) Da der Körper außer diesen Kräften noch von seinem eigenen Gewichte M nach der Vertikale Mo getrieben wird, so erhält man gegenwärtig $P = M - \Pi . \frac{dy}{ds}$ und $Q = \Pi \frac{dx}{ds}$, folglich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = 2g - \frac{2g\Pi dy}{Mds}, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = \frac{2g\Pi dx}{Mds}.$$

3) Was seine Geschwindigkeit v betrift, so wird

$vdv = 2gdx$, also

$v^2 = C + 4gx$,

wo C das Quadrat der anfänglichen Geschwindigkeit bedeutet, und also $= o$ ist, wenn der Körper seine Bewegung aus der Ruhe anfing. Für diesen Fall wird daher $v = 2\sqrt{gx}$.

Wenn also der Körper längs der Kurve zu einer vertikalen Tiefe x aus der Ruhe herabgesunken ist, so hat er dieselbe Geschwindigkeit erlangt, die er bekommen haben würde, wenn er zu eben der Tiefe frey herabgefallen wäre.

4) Aus $\frac{ds^2}{dt^2} = 4gx$ wird $dt = \frac{ds}{\sqrt{4gx}}$, also $t = \int \frac{ds}{\sqrt{4gx}}$; woraus sich gegenseitig bestimmen läßt, wie x oder s von der Zeit t abhängt.

§. 64.

1. Um zu finden, welchen Druck die Kurve an der Stelle M vom Körper leidet, multiplicire man die erstere der beyden Gleichungen (2) durch dy, die letztere durch dx, und subtrahire sie dann von einander, so bleibt:

$$\frac{dy\,d^2x}{dt^2} - \frac{dx\,d^2y}{dt^2} = 2g\,dy - \frac{2g\Pi ds}{M},$$

und wenn man für das, was auf der linken Seite steht, seinen Werth $v^2 d\varphi$ substituirt (§. 62. 4.), bekommt man:

$$v^2 d\varphi = 2g\left(dy - \frac{\Pi ds}{M}\right), \text{ woraus}$$

$$\Pi = M \,.\, \frac{dy}{ds} - \frac{Mv^2 d\varphi}{2g\,ds} = M \cos\varphi - \frac{Mv^2}{2gr} \text{ wird.}$$

2. Da φ den Neigungswinkel Mmo des Elementes Mm gegen die Horizontale mp bezeichnet, so ist M

$\cos\phi$ der Druck, den der Körper durch sein Gewicht M auf die Stelle M der Kurve ausübt (§. 44.). Der andere Theil $\frac{Mv^2}{2gr}$ des gesammten Druckes Π rührt von der Geschwindigkeit v des Körpers her (§. 62. 4.), und ist bey einer konvexen Kurve, wie AMD, deshalb subtraktiv, weil der Körper vermöge seiner Geschwindigkeit nach der Tangente fortzugehen, also von der Kurve sich zu entfernen strebt. Man könnte ihn die Fliehkraft des Körpers nennen.

3. Ist diese an irgend einer Stelle so groß, daß sie den erstern Theil $M \cos\phi$ aufhebt, so wird $\Pi = 0$; also verläßt dann der Körper die Kurve, und folgt darauf den Gesetzen der Wurfbewegung, die wir im Folgenden näher entwickeln werden. Dieser Fall ereignet sich demnach bey einer konvexen Kurve allemal, sobald irgendwo $M \cos\phi = \frac{Mv^2}{2gr}$, oder $v^2 = 2gr \cos\phi$ wird.

4. War der Körper zu Anfange seiner Bewegung in Ruhe, so ist $v^2 = 4gx$ (§. 63. 3.); also bekommt man alsdan für das Abgleiten desselben von der Kurve:

$$4gx = 2gr \cos\phi, \text{ oder}$$
$$x = \tfrac{1}{2} r \cos\phi,$$

woraus man für jede gegebene Kurve die Stelle, woselbst dies geschieht, bestimmen kann.

Exempel. Die Kurve sey ein Kreis, der in der Vertikale AB seinen Mittelpunkt hat, so ist bekanntlich der Tangentenwinkel Mmo = dem Winkel am Mittelpunkte, der dem Bogen AM zugehört; also $\cos\phi =$

$\frac{r-x}{r}$, mithin wird $x = \frac{1}{2}(r-x) = \frac{1}{3}r$, oder auch $\text{Cos}\,\varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi = 48^\circ 11' 23''$, für den Bogen, den der Körper auf dem Kreise durchläuft.

5. Bey einer Kurve, die dem Körper die hohle Seite zukehrt, ist der Krümmungshalbmesser r wegen der Abnahme des Winkels φ, negativ; daher hat man in diesem Falle:

$$\Pi = M\,\text{Cos}\,\varphi + \frac{Mv^2}{2gr},$$

so daß sich also hier die Schwungkraft des Körpers mit dem Drucke, der von seinem Gewichte herrührt, vereinigt.

Von der freyen Bewegung geworfener Körper.

§. 65.

Fig. 7. **Aufgabe.** Ein Körper wird von A aus mit der Geschwindigkeit c nach einer Richtung AK geworfen, die mit der Horizontale AB den Winkel KAB = I macht. Man sucht die Kurve AMD, worin er fortgeht, und seine Geschwindigkeit an jeder Stelle derselben.

Aufl. 1) Es sey M sein Ort für die Zeit t, die vom Anfange seiner Bewegung an verflossen ist, und seine Geschwindigkeit daselbst $= v$. Man fälle aus M auf AB das Perpendikel MP, und setze AP = x, PM = y, und den Bogen AM = s.

2) Wird nun der Widerstand der Luft hier nicht in Betracht gezogen, so wirkt in M weiter keine Kraft auf ihn, als sein eigenes Gewicht, das wir M nennen

wollen; daher hat man (§. 59. 4.) $P = o$, und $Q = - M$, folglich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = -2g.$$

3) Das Integral von ersterer Gleichung ist $\frac{dx}{dt} = A$, und diese nochmals integrirt, giebt $x = At$, wozu keine Konstante addirt wird, weil für $t = o$, auch $x = o$ ist.

4) Von der andern Gleichung $\frac{d^2y}{dt^2} = -2g$ ist das erste Integral $\frac{dy}{dt} = B - 2gt$, und das zweyte $y = Bt - gt^2$, wozu ebenfalls nichts addirt wird, weil auch y für $t = o$ verschwindet.

5) Um die Größen A und B zu bestimmen, setze man den Tangentenwinkel $mMo = \varphi$, so hat man $\frac{dx}{ds} = \operatorname{Cos} \varphi$, $\frac{dy}{ds} = \operatorname{Sin} \varphi$, also $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \operatorname{Cos} \varphi$, und $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \operatorname{Sin} \varphi$.

6) Nun ist für $t = o$, oder zu Anfange der Bewegung, $v = c$, und der Winkel $\varphi = I$, weil AK die anfängliche Richtung des Körpers, folglich die Tangente der Kurve an A ist; daher wird $A = c \operatorname{Cos} I$, und $B = c \operatorname{Sin} I$.

7) Diese Werthe für A und B in den für x und y gefundenen Ausdrücken substituirt, geben $x = ct \operatorname{Cos} I$, und $y = ct \operatorname{Sin} I - gt^2$.

8) Aus ersterer Gleichung erhält man $t = \frac{x}{c \operatorname{Cos} I}$, und wenn man damit aus der zweyten t wegschafft:

$$y = x \operatorname{tang} I - \frac{g x^2}{c^2 \operatorname{Cos} I^2},$$

eine Gleichung, die die Natur der gesuchten Kurve ausdrückt.

9) Nennt man h die der Geschwindigkeit c zugehörige Fallhöhe, so ist $4gh = c^2$ (§. 39.), wodurch sich die vorige Gleichung in folgende verwandelt:

$$y = x \operatorname{tang} I - \frac{x^2}{4h \operatorname{Cos} I^2}.$$

10) Für die Geschwindigkeit v erhält man aus §. 59. 5.

$$v dv = -2g dy, \text{ also}$$

$$v^2 = C - 4gy,$$

und, da für $t = 0$, oder $y = 0$, $v = c$ ist, $C = c^2$, mithin $v^2 = c^2 - 4gy = 4g(h - y)$.

§. 66.

Während der Zeit t entfernt sich der Körper von A in der Horizontale AB um $x = ct \operatorname{Cos} I$, und erreicht zugleich eine vertikale Höhe $y = ct \operatorname{Sin} I - gt^2$.

Erstere Bewegung, das horizontale Fortrücken, geschieht also gleichförmig, und zwar mit eben der Geschwindigkeit $c \operatorname{Cos} I$, die dem Körper Anfangs nach dieser Richtung ertheilt wurde; letztere Bewegung, sein vertikales Steigen, ist dagegen gleichförmig verzögert, und verhält sich gerade so, als wenn der Körper mit

dem

dem vertikalen Antheile c Sin I seiner anfänglichen Geschwindigkeit bloß aufwärts gestiegen wäre. Diese Bemerkung wird zur Erläuterung des allgemeinen Satzes §. 59. 3. dienen, da im gegenwärtigen Falle nach horizontaler Richtung gar keine Kraft, und nach vertikaler Richtung bloß die Schwere auf den Körper wirkt.

§. 67.

Wenn man $y = 0$ setzt, so bekommt man für die Punkte, worin die krumme Linie von der Horizontale AB geschnitten wird, die Gleichung $0 = 4hx \text{ Sin I Cos I} - x^2$, deren Wurzeln $x = 0$, und $x = 4h \text{ Sin I Cos I}$ sind.

Von diesen beyden Wurzeln bezieht sich die erstere auf den Anfangspunkt A, die letztere auf den zweyten Durchschnittspunkt B, und giebt also die Entfernung $BA = 4h \text{ Sin I Cos I} = 2h \text{ Sin } 2I$, in der der Körper niederfällt. Diese Entfernung nennt man die **Weite des Wurfs.**

Wird z. B. der Körper mit einer Geschwindigkeit von 75 Fuß unter einem Winkel von 15° geworfen, so ist $h = \frac{c^2}{4g} = \frac{5625}{62,5} = 90$ Fuß, $\text{Sin } 2I = \text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2}$, folglich die gesuchte Wurfweite $AB = 90$ Fuß.

§. 68.

Da die Wurfweite sowohl für $I = 0$, als für $I = 90^\circ$ verschwindet, so folgt, daß er irgend einen Winkel zwischen 0° und 90° geben müsse, für den sie bey einerley Schnelligkeit des Wurfs am größten ist. Nun kann der Sinus eines Winkels bekanntlich nie größer als 1 werden, also ist der größte Werth der Wurfweite $= 2h$, und diesen erhält sie für $2I = 90°$, oder für $I = 45°$.

§. 69.

Um den Punkt der Kurve zu finden, der über AB am höchsten liegt, darf man nur $\frac{dy}{dx} = 0$ setzen. Dies giebt $0 = 2h \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I - x$, oder $x = h \operatorname{Sin} 2I = \frac{1}{2} AB$, für die Abscisse, die der größten Ordinate CD zugehört; hieraus erhält man ferner $CD = h \operatorname{Sin} I^2$.

Die größte Höhe also, zu der der Körper hinaufsteigt, ist $h \operatorname{Sin} I^2$, und er gelangt zu dieser, wenn er in die Vertikale DC kommt, die die Weite AB seiner Bahn halbirt.

§. 70.

Nimmt man CD zur Abscissenlinie an, und setzt $DI = u$, $IM = z$, so wird $x + z = AC = 2h \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I$, und $y + u = CD = h \operatorname{Sin} I^2$; folglich $x = 2h \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I - z$, und $y = h \operatorname{Sin} I^2 - u$. Dadurch verwandelt sich die Gleichung (65. 40.) in folgende zwischen u und z

$$h \operatorname{Sin} I^2 - u = h \operatorname{Sin} I^2 - \frac{z^2}{4h \operatorname{Cos} I^2}, \text{ oder}$$

$$z^2 = 4hu \operatorname{Cos} I^2.$$

Die Bahn des Körpers ist also eine Parabel, die in D ihren Scheitel, und die Vertikale DC zum Durchmesser hat.

§. 71.

Fig. 8. Bey der im §. 67. gegebenen Formel für die Weite des Wurfes liegt die Voraussetzung zum Grunde, daß der Körper nicht unter die Horizontale AB herabsinken könne. Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt A liege in einer gewissen Höhe über den Boden, und es bekomme der Körper von diesem Orte aus die Geschwindigkeit c nach horizontaler Richtung AB, so wird die Gleichung §. 65. 10., wenn man darin $1 = 0$ setzt, folgende:

$$4hy = -x^2.$$

Diese Gleichung giebt, wie man sieht, für y lauter negative Werthe, und gehört also zu einer Kurve, die ganz unterhalb AB liegt. Man verwechsele ihre Koordinaten, und setze als Abscisse $AQ = u$, und als Ordinate $QM = z$, so erhält man

$$z^2 = 4hu$$

eine Gleichung, wie die im §. 70. Der Körper beschreibt also den einen Arm einer Parabel, deren Scheitel in A liegt.

§. 72.

In Beziehung auf die Zeit hat man ferner aus §. 65. 8., wenn daselbst $1 = 0$ gesetzt wird, $u = gt^2$, und $z = ct$. Hieraus folgt:

1) Daß der Körper in einer bestimmten Zeit zu eben der Tiefe unter AB gelangt, als wenn er während derselben von A frey herabgefallen wäre; und

2) daß er sich von der Vertikale, die durch A

geht, gleichförmig, oder in gleichen Zeiten um gleich vieles, entfernt, und zwar mit eben der Geschwindigkeit, die ihm zu Anfange in A nach horizontaler Richtung ertheilt wurde.

Anmerk. Ist also z. B. AQ der Mastbaum eines Schiffes, das mit der Geschwindigkeit c nach AB fortrückt, und man läßt einen Körper aus seinem Gipfel A herabfallen, so bewegt sich dieser, absolut genommen, in einer Parabel, weil er in A die horizontale Geschwindigkeit c mit dem Schiffe gemein hat; betrachtet man aber seine Bewegung in Bezug auf den Mastbaum, so erhellet aus den beyden vorhergehenden Sätzen, daß er an demselben eben so herabgleiten müsse, als es beym still stehenden Schiffe der Fall gewesen seyn würde. Es sey nemlich M sein Ort nach Verlauf der Zeit t, so ist $AQ = gt^2$, $QM = ct$; nun ist aber während dieser Zeit auch der Mastbaum aus AQ in PM fortgerückt, folglich sind beyde noch beysammen, und der Körper ist um $PM = gt^2$ an ihm herabgesunken, d. h. um eben so viel, als in der Zeit t der natürliche Fallraum beträgt.

Vom Einflusse der Umdrehung der Erde auf das Steigen und Fallen der Körper.

§. 73.

Die Astronomie lehrt uns, daß sich die Erde innerhalb 24 Stunden einmal um ihre Axe drehe. Diese Bewegung wird allen Körpern, die sich auf ihr befinden, mitgetheilt, und wir glauben von einem Körper, der keine andere Bewegung als diese hat, er sey in Ruhe, weil wir mit ihm zugleich fortrücken, ohne uns dessen bewußt zu seyn. Da aber seine Ruhe nur in Bezug auf uns gilt, und er sich doch wirklich bewegt, so ist jede andere Bewegung, die man ihm sonst noch ertheilt, nie rein, sondern kommt mit jener erstern in Verbindung, und bildet damit eine zusammengesetzte Bewegung.

§. 74.

Hieraus wird nun begreiflich, daß das Fallen eines Körpers aus der scheinbaren Ruhe, von der eben die Rede war, eigentlich nicht in gerader Linie, sondern in einer Parabel, oder doch wenigstens in einer der Parabel nahe kommenden Linie geschehe. Allein da die Stelle des Bodens, über der er vom Anfange an schwebte, mit ihm dieselbe Bewegung seitwärts hat, so kann man es sich eben so leicht erklären, warum dennoch der Körper beständig in einer und derselben vertikalen Linie herabzufallen scheint, und am Ende wirklich den Boden in eben der Stelle trift, wie in dem Falle, wenn die Erde still stände.

§. 75.

Dieses wäre ohne Zweifel genau wahr, wofern sich annehmen ließe, daß Körper und Boden genau dieselbe Bewegung um die Axe der Erde mit einander gemein hätten. Um einzusehen, daß dies nicht der Fall Fig. 9. sey, setze man, es sey CP die Axe der Erde, C ihr Mittelpunkt, A ein Punkt auf ihrer Oberfläche, a der Ort eines Körpers, der sich über A in der vertikalen Höhe Aa befindet, so sind AN an die Entfernungen der Punkte A und a von der Axe CP, die sich also wie AC und aC verhalten. Während der Zeit nun, daß die Erde sich einmal um ihre Axe dreht, beschreiben die

Punkte A und a zwey Kreise die AN und an zu Halbmessern haben; daher durchläuft der Punkt a in eben der Zeit einen größern Raum, als der Punkt A, und bewegt sich folglich schneller als dieser.

Diese Verschiedenheit in der Umlaufsgeschwindigkeit des Körpers und der Stelle des Bodens, die unter ihm liegt, ist nun zwar gering, aber in manchen Fällen, wie wir sehen werden, doch groß genug, um beym Fallen des Körpers eine merkliche Abweichung desselben von der vertikalen Richtung hervorzubringen. Eben so bewirkt sie auch bey andern Bewegungen des Körpers eine ähnliche Abweichung von der Bahn, die er ohne Rücksicht auf die Umdrehung der Erde beschreiben würde.

§. 76.

Fig. 10. Wir wollen zuerst annehmen, es sey D ein Punkt in der Ebene des Aequators AEC, seine Höhe DA über der Oberfläche $= h$, der Halbmesser der Erde $= a$, die Umlaufszeit derselben in Sekunden $= T$.

1) So durchläuft der Punkt A in dieser Zeit den ganzen Umfang des größten Kreises, oder den Raum $= 2\pi a$; setzt man also seine Geschwindigkeit, oder den Weg, den er in einer Sekunde macht, $= f$, so ist $fT = 2\pi a$, folglich $f = \frac{2\pi a}{T}$.

2) Der Punkt D hingegen beschreibt in eben der Zeit um den Mittelpunkt C einen Kreis, der $CD = a + h$ zum Halbmesser hat, oder durchläuft darin den Raum $= 2\pi\,(a + h)$. Daher ist seine Geschwin-

digkeit, die wir f′ nennen wollen, $= \frac{2\pi(a+h)}{T}$, folglich $f' = f\left(1 + \frac{a}{h}\right)$.

3) Gesetzt nun, ein Körper fällt aus der Ruhe von D zur Oberfläche herab, so geschieht seine Bewegung in einer Kurve, DME, die in der Ebene des Aequators liegt, und also den Boden irgendwo in E treffen muß.

4) Es sey M sein Ort nach Verlauf der Zeit t. Man fälle aus diesem Punkte auf DC das Perpendikel MP, und setze $CP = x$, $MP = y$, $MC = r$, und den Winkel $MCP = \varphi$, so ist $x = r \operatorname{Cos} \varphi$, und $y = r \operatorname{Sin} \varphi$.

5) Da der Körper in M von keiner andern Kraft getrieben wird, als von seinem Gewichte $= M$, und dies nach den Richtungen PC und MP in die Kräfte $M \operatorname{Cos} \varphi$ und $M \operatorname{Sin} \varphi$ zerfällt, so hat man hier $P = - M \operatorname{Cos} \varphi$, und $Q = - M \operatorname{Sin} \varphi$, also:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = -2g \operatorname{Cos} \varphi, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = -2g \operatorname{Sin} \varphi.$$

6) Wegen der Kleinheit des Winkels φ *) kann

*) Sicher wird nicht leicht die Zeit des Fallens über eine Minute dauren, und doch beträgt für diese Dauer der Winkel φ nur etwas geringes über 15′ Von diesem Bogen ist für den Halbmesser $= 1$, die Länge $= 0{,}00436332$, und der Sinus $= 0{,}00436331$; also macht da der Unterschied zwischen beyden noch kein $\frac{1}{400000}$ von φ aus.

man füglich $\sin \varphi = \varphi$ setzen, wodurch $y = r\varphi$, also $\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = -2g\varphi$ wird.

7) Nun ist $\frac{d(r\varphi)}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\frac{dr}{dt}$, und $\frac{d^2(r\varphi)}{dt}$ $= r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + \varphi\frac{d^2r}{dt^2}$; ferner ist d^2r der Raum, durch den die Schwere den Körper während dt forttreibt, also $d^2r = -2gdt^2$, und folglich $\varphi\cdot\frac{d^2r}{dt^2}$ $= -2g\varphi$. Daher erhält man (6)

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{gr}{dt} - 2g\varphi = -2g\varphi; \text{ also}$$

$$r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}, \text{ oder}$$

$$\frac{d^1\varphi}{d\varphi} = -\frac{2dr}{r}.$$

8) Hiervon ist das Integral: $\log\frac{d\varphi}{dt} = \log C$ $- 2\log r$

$$\text{oder } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}.$$

9) Für $t = o$, ist $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f'}{a}$, und $r = a + h$, also $\frac{f'}{a} = \frac{C}{(a+h)^2}$, $C = \frac{f'(a+h)^2}{a}$; daher wird

$$d\varphi = \frac{f'(a+h)^2dt}{ar^2}.$$

10) Da nun der Körper in der Zeit t durch den

Raum gt^2 gefallen ist, so hat man $r = a + h - gt^2$ $= (a + h)(1 - \frac{gt^2}{a+h})$, folglich, weil $\frac{gt^2}{a+h}$ ein sehr kleiner Bruch ist:

$$d\varphi = \frac{f'dt}{a}\left(1 + \frac{2gt^2}{a+h}\right), \text{ und}$$

$$\varphi = \frac{f't}{a} + \frac{2gft^3}{3a^2}.$$

11) Wenn der Körper in E gelangt, so ist $r = a$, also $gt^2 = h$, $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$. Diesen Werth für t in φ substituirt, giebt den Winkel ACE, oder, wenn man noch mit a multiplicirt, den Bogen $AE = f'\sqrt{\frac{h}{g}}$ $+ \frac{2fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}$.

12) Hiervon den Bogen $f\sqrt{\frac{h}{g}}$ subtrahirt, den in eben der Zeit $\sqrt{\frac{h}{g}}$ der Punkt A beschrieben hat (1), giebt eine Differenz $= (f' - f)\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} =$ $\frac{5fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{10\pi h^{\frac{3}{2}}}{3T\sqrt{g}}$. Um so viel hat sich also der Körper während seines Fallens von der Vertikale DA entfernt.

13) Da sich die Erde von Westen nach Osten dreht, so ist diese Abweichung östlich.

14) Die Umdrehungszeit der Erde T beträgt 86164 Sekunden mittl. Zeit, daher ist der Logarithme des Koefficienten $\frac{10\pi}{3T\sqrt{g}} = 0{,}4877929 - 5$.

Exempel. Es sey $h = 1000$ Fuß, so hat man
$\frac{3}{2}\log h = 4{,}5000000$, dazu
$0{,}4877927 - 5$ addirt
giebt $0{,}9877927 - 1$.
also die Abweichung $= 0{,}97228$ Fuß.

§. 77.

Fig. 11. Wird der Körper von A aus mit der Geschwindigkeit c vertikal aufwärts geworfen, so ist seine anfängliche Geschwindigkeit nach der auf CA senkrechten Richtung $= f$, also wird in der Formel $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$ (§. 76.8.) für $t = o$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f}{a}$, und $r = a$, folglich $C = af$, und $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{af}{r^2}$.

Da ferner seine Bewegung nach der Vertikale CM durch die Schwere gleichförmig verzögert wird, so ist $r = a + ct - gt^2 = a\left(1 + \frac{ct - gt^2}{a}\right)$; mithin wird

$$a d\Phi = f dt\left(1 - \frac{2ct}{a} + \frac{2gt^2}{a}\right)$$

$$\text{und } a\Phi = f\left(t - \frac{ct^2}{a} + \frac{2gt^3}{3a}\right).$$

Nachdem er die Kurve AME durchlaufen ist, und in E niederfällt, ist wieder $r = a$, folglich $ct = gt^2$, oder $t = \frac{c}{g}$. Dies für t substituirt, giebt den Bogen

$AE = f\left(\frac{c}{g} - \frac{c^3}{3ag^2}\right)$, und davon den Bogen $\frac{fc}{g}$ subtrahirt, den in eben der Zeit $\frac{c}{g}$ der Punkt A beschrieben hat, bleibt $- \frac{fc^3}{3ag^2} = - \frac{2\pi c^3}{3g^2T}$.

Diese negative Differenz zeigt an, daß der Punkt A dem Körper während seiner Bewegung vorgerückt ist. Also fällt der Körper hinter der Vertikale AD, d. h. westwärts von ihr, in einer Entfernung $= \frac{2\pi c^3}{3g^2T}$ nieder.

Exempel. Es sey $c = 900$ Fuß, so hat man:

$$
\begin{array}{rcl}
3 \log c & = & 8,8627275 \\
\log 2\pi & = & 0,7981799 \\
\hline
\log 2\pi c^3 & = & 9,6609074 \\
\text{Ferner } \log T & = & 4,9353259 \\
2 \log g & = & 2,3876400 \\
\log 3 & = & 0,4771212 \\
\hline
\log 3g^2T & = & 7,8000871 \\
 & \text{von} & 9,6609074 \text{ subt.} \\
\hline
 & \text{bleibt} & 1,8608203.
\end{array}
$$

Daher beträgt die Abweichung = 72,58 Fuß.

Anmerk. Die Formel §. 76. 8. gilt auch noch für den allgemeinern Fall, wenn dem Körper in der Ebene des Aequators eine Geschwindigkeit nach irgend einer schrägen Richtung ertheilt wird. Hiervon handelt Herr d'Alembert in s. Opusc. math. T. VII. pag. 314 u. f. ausführlich, legt aber dabey den Satz zum Grunde: daß der Körper nach den Gesetzen der Attraktion eine Ellipse beschreiben müsse, und findet daher auf einem ganz andern Wege, was hier aus den ersten Sätzen der Mechanik hergeleitet ist. Dessen ungeachtet ist sein Verfahren nicht kürzer als das meinige, und hat dabey das Unvollkommene, daß es unbrauchbar wird, sobald man den Widerstand der Luft in Betracht ziehen will, weil alsdann jene Voraussetzung wegfällt.

§. 78.

Fig. 9. Liegt der Ort A nicht im Aequator, sondern unter irgend einer Breite $= \beta$, so bewegt er sich innerhalb der Zeit T um die Erdaxe CP durch den Umfang eines Parallelkreises, der zum Halbmesser die senkrechte Linie $AN = a \operatorname{Cos} \beta$ hat; folglich ist seine Geschwindigkeit $q = \frac{2\pi a \operatorname{Cos} \beta}{T}$, und die Geschwindigkeit q' eines Ortes a, der in der vertikalen Höhe $Aa = h$ über ihm liegt, ist $= q\left(1 + \frac{h}{a}\right)$.

§. 79.

Fällt demnach ein Körper von a aus der scheinbaren Ruhe auf die Erdfläche herab, so hat er zu Anfange die Geschwindigkeit q' nach einer auf die Ebene aCP senkrechten Richtung; daher kommt seine Bahn in die Fig. 12. Ebene eines größten Kreises DAG zu liegen, der auf den Meridian PA senkrecht ist, und wenn also E der Ort ist, wo er niederfällt, so weicht dieser von A nicht allein in der Länge, sondern auch außerdem noch in der Breite ab.

Man setze das Maaß des Bogens $AE = \lambda$, so hat man (§. 76. 11.) $a\lambda = q'\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}$.

Ferner ist im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke APE

$$1 : \text{Sin AP} = \text{tang APE} : \text{tang AE}$$

also $\text{tang APE} = \frac{\text{tang}\,\lambda}{\text{Cos}\,\beta}$, oder, da der Winkel APE sehr gering ist, $\text{APE} = \frac{\lambda}{\text{Cos}\,\beta}$. Dieser Winkel mißt den Bogen Ae, der vom Parallelkreise WAO zwischen den Meridianen PA und PE enthalten ist; multiplicirt man ihn also mit $a\,\text{Cos}\,\beta$, dem Halbmesser des Parallelkreises, so erhält man die absolute Länge des Bogens

$$\text{Ae} = a\lambda = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5gh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}.$$

Hiervon nun das Stück $p\sqrt{\frac{h}{g}}$ abgezogen, das der Punkt A während der Zeit $\sqrt{\frac{h}{g}}$ im Parallelkreise zurückgelegt hat, bleibt $\frac{5qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{10\pi h^{\frac{3}{2}}\,\text{Cos}\,\beta}{3T\sqrt{g}}$ (§. 78.), für die Abweichung des Körpers von der Vertikale Aa nach der Richtung des Parallels.

§. 80.

Die andere Abweichung Ee in die Breite läßt sich folgendermaaßen bestimmen:

Im sphärischen Dreyecke APE ist $\text{Cos PE} = \text{Cos PA} \,.\, \text{Cos AE} = \text{Sin}\,\beta\,\text{Cos}\,\lambda = \text{Sin}\,\beta - \frac{1}{2}\lambda^2\,\text{Cos}\,\beta$. Setzt man daher $\text{Ee} = \omega$, so wird $\text{Cos PE} = \text{Sin}\,(\beta - \omega) = \text{Sin}\,\beta - \omega\,\text{Cos}\,\beta$, also

$$\omega \operatorname{Cos} \beta = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \operatorname{Sin} \beta$$

$$\text{oder } \omega = \tfrac{1}{2}\lambda^2 \operatorname{tang} \beta$$

folglich die Distanz der Punkte E und e auf der Erdfläche $= a\omega = \frac{1}{2}\lambda^2 a \operatorname{tang} \beta$.

Nun ist $a\lambda = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5qh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}$, wovon hier nur das erste Glied in Betracht kommt, also $\lambda = \frac{q}{a}\sqrt{\frac{h}{g}} = \frac{2\pi \operatorname{Cos} \beta}{T}\sqrt{\frac{h}{g}}$. Dies für λ substituirt, giebt $a\omega = \frac{2\pi^2 ah \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \beta}{T^2 g} = \frac{\pi^2 ah \operatorname{Sin} 2\beta}{T^2 g}$.

§. 81.

1) Um so viel entfernt sich also der Körper während des Fallens von dem Parallelkreise WAO, worin die Vertikale Aa liegt; und zwar allemal in unserer nördlichen Halbkugel südwärts, weil EP, als Hypothenuse des Dreyecks APE, jederzeit größer als AP ist.

2) Unter dem Aequator und am Pole ist diese Abweichung $= 0$; am größten aber ist sie für $\operatorname{Sin} 2\beta = 1$, oder unter der Breite von 45°.

3) Ihr beständiger Koefficient $\frac{\pi^2 a}{T^2 g}$ ist $=$ 0,001671824; daher beträgt sie z. B. 10 Fuß, wenn ein Körper unter der Breite von 45° aus einer Höhe von 6000 Fuß herabfällt.

§. 82.

Es bleibt noch der andere Fall zu betrachten übrig, wo der Körper aus A mit einer Geschwindigkeit $= c$ nach der Vertikale Aa in die Höhe geworfen wird.

Hier ist $a\lambda = q\left(\frac{c}{g} - \frac{c^3}{3ag^2}\right)$, und der Bogen, den der Punkt A während der Zeit $\frac{c}{g}$ gegen O zu beschreiben hat, $= \frac{qc}{g}$; also ist die Abweichung des Körpers von der Vertikale Aa im Parallelkreise WAO $=$ $\frac{qc^3}{3ag^2} = \frac{2\pi c^3 \operatorname{Cos}\beta}{3Tg^2}$ westlich.

Ferner wird $a\omega = \frac{1}{2}\lambda^2 a \tang \beta = \frac{q^2c^2 \tang \beta}{2ag^2}$ $= \frac{\pi^2 ac^2 \operatorname{Sin} 2\beta}{T^2g^2}$; nennt man nun h die der Geschwindigkeit c zugehörige Fallhöhe, so ist $c^2 = 4gh$, also die Abweichung des Körpers vom Parallelkreise $=$ $0{,}0066873 \cdot h \operatorname{Sin} 2\beta$ südlich.

Exempel. Für $\beta = 45°$, $c = 900$ Fuß, wird $h = 12960$ Fuß, folglich die südliche Abweichung $=$ $86\frac{2}{3}$ Fuß.

Anmerk. Man kann von dem hier Vorgetragenen nun leicht zur Auflösung des allgemeinern Problems übergehen: wie ein Körper sich bewegen müsse, der an irgend einem Orte der Erde nach einer beliebigen Richtung geworfen wird. Dies genauer zu untersuchen, halte ich um so mehr der Mühe werth, da ich fest überzeugt bin, daß darin die einzige und richtige Beantwortung der Frage liegt, warum eine Kugel oft so merklich von der vertikalen Ebene abweicht, in der das Geschütz gerichtet ist; es würde aber gegen meine Absicht seyn, diese Materie hier ausführlich abzuhandeln.

Viertes Kapitel.

Von dem Widerstande der Luft.

§. 83.

Ein Körper, der von einer flüßigen Materie, als Wasser, Luft oder dergl. umgeben ist, kann darin seinen Ort nicht verändern, ohne jedesmal die Theile derselben, in deren Stelle er dringen will, vor sich wegzutreiben. Soll nun dies geschehen, so muß er beständig auf die vor ihm liegende Masse einen Druck ausüben, und der erzeugt allemal, wie wir in der Statik gesehen haben, von Seiten des Hindernisses einen eben so großen Gegendruck. Daher wirkt die flüßige Materie auf den Körper als eine verzögernde Kraft, und macht also, daß er sich langsamer in ihr bewegt, als es unter gleichen Umständen im leeren Raume der Fall seyn würde.

§. 84.

Wir wollen nun setzen, ein gerades Prisma, das sich durch die Luft nach der Richtung seiner Axe bewegt, leide von der vor ihm befindlichen Luftmasse den Druck $= \Pi$, so ist klar:

1) daß dieser Druck auf seine vordere Grundfläche senkrecht gerichtet sey, und

2) sich über dieselbe gleichförmig vertheile.

Ersteres folgt nemlich: weil die Richtungen des Druckes und der Bewegung entgegen gesetzt seyn müssen;

sen; letzteres: weil alle Elemente der Grundfläche gleiche Geschwindigkeit, und dabey gegen die Richtung des Druckes einerley Lage haben; so daß also beym einen eben die Ursachen des Widerstandes vorhanden sind, als beym andern. Daher muß ferner:

3) der Druck Π bey einerley Geschwindigkeit des Prisma's sich wie seine Grundfläche verhalten, und

4) seine mittlere Richtung durch den Schwerpunkt der Grundfläche, folglich auch zugleich durch die Axe des Prisma's gehen.

§. 85.

Wird demnach die Grundfläche des Prisma's = S, und Π = NS gesetzt, so hat N für einerley Geschwindigkeit jedesmal einen bestimmten Werth, und ist also von dieser nur allein abhängig.

Wofern man nun annimmt: daß einerley Druck entstehe, wenn entweder die Luft mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich senkrecht gegen eine ruhende Fläche bewegt, oder umgekehrt die Fläche mit eben der Geschwindigkeit nach einer auf sie senkrechten Richtung durch stillstehende Luft geführt wird; so läßt sich das Gesetz, nach welchem der Koefficient N von der Geschwindigkeit abhängt, wenigstens vorläufig, aus Beobachtungen über die Stärke des Luftstoßes herleiten.

Folgende Tafel enthält einige Versuche dieser Art, die von Herrn **Woltmann** vermittelst seines hydrometrischen Flügels angestellt sind *), und zwar in der er-

*) S. dessen Beschreibung des hydrometrischen Flügels. S. 50.

sten Kolumne die Geschwindigkeit der Luft $= v$ in Hamb. Fußen, in der zweyten der Druck auf 1 Quad. Fuß Fläche $= N$ in Lothen, und in der dritten die daraus entspringende Verhältnißzahl $N : v^2$ angegeben:

v	N	$N : v^2$
10	4,00	0,0400
12	5,33	0,0370
20	16,11	0,0403
21	16,73	0,0379
24	20,72	0,0360
25	21,39	0,0342
26	23,15	0,0342
28	27,23	0,0347
29	29,25	0,0348
30	31,41	0,0349

Da die Differenzen zwischen den Werthen der dritten Kolumne nicht allein sehr gering, sondern auch wechselsweise bald positiv, bald negativ sind, so läßt sich daraus sicher auf ein unveränderliches Verhältniß zwischen N und v^2 schließen; also lehren uns diese Versuche, was man auch sonst aus theoretischen Gründen anzunehmen pflegt, daß sich der Widerstand der Luft in Rücksicht der Geschwindigkeit wie das Quadrat derselben verhalte.

Nimmt man nun zwischen den zehn verschiedenen Werthen von $\frac{N}{v^2}$ das arithmetische Mittel, so wird:

$$N = 0{,}0364 \,.\, v^2, \text{ folglich } \Pi = 0{,}034 \,.\, v^2 S \,.\, \text{Loth}.$$

Die Einheit, die hier zum Grunde liegt, ist 1 Hamb. Fuß = 0,913 Rheinl. Fuß; will man also die Formel so einrichten, daß sich darin sowohl v als S auf Rheinl. Maaß beziehen, so muß man ihren Koefficienten noch durch das Biquadrat der Verhältnißzahl 0,913 dividiren, wodurch endlich:

$$\Pi = 0{,}0524\, v^2 S \text{ . Loth wird.}$$

Exempel. Ein Cylinder, dessen Grundfläche 6 Rheinl. Fuß im Durchmesser hat, bewegt sich nach der Richtung seiner Axe durch die Luft mit der Geschwindigkeit von 19 Fuß in 1 Sekunde; wie groß ist der Widerstand, der ihm die Luft entgegensetzt?

Hier ist $S = 9\pi$, also

$$\begin{aligned} \log S &= 1{,}4513924 \\ \log v^2 &= 2{,}5575072 \\ \log \tfrac{524}{10000} &= 0{,}7193313 - 2 \\ \hline \log \Pi &= 2{,}7282309 \end{aligned}$$

folglich $\Pi = 534{,}8386$ Loth $= 16{,}7137$ ℔.

§. 86.

Aufgabe. Den Widerstand zu bestimmen, den eine Kugel vom Halbmesser = a in der Luft leidet, wenn sie sich durch dieselbe mit einer gegebenen Geschwindigkeit v bewegt.

Fig. 13. 1) Man nehme die Richtung der Bewegung CA zur Axe der Kugel an, lege durch sie einen größten Kreis ADBE, und setze darin CP = u, PM = z, und den Winkel MCA = φ, so hat man $u = a \cos \varphi$, und $z = a \sin \varphi$.

2) Auf das Element Mm dieses Kreises wirkt offenbar nur eine Luftschicht von der Breite $mr = dz = a \operatorname{Cos} \varphi d\varphi$; es leidet also den Druck $p = 0{,}0524\, v^2 a \operatorname{Cos} \varphi d\varphi$, den wir der Kürze wegen $= \lambda v^2 a \operatorname{Cos} \varphi d\varphi$ setzen wollen.

3) Da aber dieser Druck auf das Element unter der schiefen Richtung Mr geschieht, so ist nur der Theil von ihm $= p \operatorname{Cos} \varphi$ wirksam, der nach der Normale MC gerichtet ist.

4) Dieser zerfällt noch im Mittelpunkte der Kugel nach den Richtungen CB und CE in die beyden Kräfte $p \operatorname{Cos} \varphi^2$ und $p \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi$, wovon die letztere durch einen eben so großen Gegendruck, der von der andern Seite her entsteht, aufgehoben wird.

5) Nun ist ferner die Fläche der Kugelzone, die zwischen den beyden durch MP und mp gehenden Parallelkreisen liegt, $= 2\pi \,.\, MP \,.\, Mm$, also der unmittelbare Druck darauf $= 2\pi z p$, und folglich der daraus entspringende Widerstand nach CB $= 2\pi z \,.\, p \operatorname{Cos} \varphi^2 = 2\pi\lambda v^2 a^2 \operatorname{Cos} \varphi^3 \operatorname{Sin} \varphi d\varphi$ (1. 2.) $= -\dfrac{2\pi\lambda v^2 u^3 du}{a^2}$.

6) Hiervon das Integral genommen, giebt den Widerstand für die Fläche des Kugelsegmentes, das von dem Schnitte durch MP begrenzt wird, $= 2\pi\lambda v^2 \left(C - \dfrac{u^4}{4a^2}\right)$, und da derselbe für $\varphi = 0$, oder $u = a$ verschwindet, so ist $C = \frac{1}{4}a^2$.

7) Setzt man nun $u = 0$, so erhält man endlich

den gesammten Widerstand, den die Kugel leidet, $= 2\pi\lambda v^2 C = \frac{1}{2}\pi\lambda v^2 a^2$.

§. 87.

Die Fläche eines größten Kreises der Kugel ist $= \pi a^2$; also der Widerstand, den sie leidet, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit v nach einer auf sie senkrechten Richtung durch die Luft bewegt, $= \pi\lambda v^2 a^2$. Daraus folgt demnach:

Daß eine Kugel halb so viel Widerstand finde, als ihr größter Kreis, der sich mit eben der Geschwindigkeit senkrecht auf seine Richtung fortbewegt.

Exempel. Eine Kugel also, die 6 Fuß im Durchmesser, und 19 Fuß Geschwindigkeit hat, leidet 8,3565 ℔ Widerstand (§. 85.).

§. 88.

Aufgabe. Ein Körper von gegebener Form und Masse fällt aus der Ruhe durch die Luft vertikal herab; man fragt, wie groß nach Verlauf der Zeit t seine Geschwindigkeit v, und der zurückgelegte Fallraum x sey.

Aufl. 1) Der Widerstand, den ihm die Luft entgegensetzt, ist, wie wir gesehen haben, sowohl von seiner äußern Form, als auch von seiner Geschwindigkeit abhängig; so z. B. war er für ein Prisma, das sich senkrecht auf seine Vorderfläche S mit der Geschwindigkeit v bewegt, $= \lambda S v^2$, und für eine Kugel, deren Halbmesser $=$ a ist, $= \frac{1}{2}\lambda\pi a^2 v^2$; wir wollen ihn daher allgemein $= L v^2$ setzen.

2) Außerdem verliert der Körper in der Luft noch

so viel von seinem absoluten Gewichte, als die Luftmasse wiegt, die mit ihm gleiches Volumen hat. Nennt man also seine Masse, oder sein absolutes Gewicht $= M$, sein Volumen $= V$, seine Dichte $= n$, die Dichte der Luft $= i$, so ist $M = nV$, und der Verlust, den er leidet $= iV$, folglich behält er noch das Gewicht $(n-i)$ $V = (1 - \frac{i}{n}) M$.

3) Es wirken also in jedem Augenblicke zwey Kräfte auf den Körper: sein relatives Gewicht $(1 - \frac{i}{n}) M$, womit er vertikal herabzusinken strebt, und nach entgegengesetzter Richtung der Widerstand Lv^2; daher hat man hier (§. 50.) $P = (1 - \frac{i}{n}) M - Lv^2$, und

$$dv = \frac{2gPdt}{M} = 2gdt\,(1 - \frac{i}{n} - \frac{Lv^2}{M}).$$

4) Man setze zur Abkürzung $2g\,(1 - \frac{i}{n}) = f$, und $\frac{2gL}{M} = \frac{f}{\varkappa^2}$, so wird

$$dv = fdt\,(1 - \frac{v^2}{\varkappa^2})$$

$$\text{also } \frac{2fdt}{\varkappa} = \frac{2\varkappa dv}{\varkappa^2 - v^2} = \frac{dv}{\varkappa + v} + \frac{dv}{\varkappa - v}$$

$$\text{und } \frac{2ft}{\varkappa} = \log(\varkappa + v) - \log(\lambda - v) = \log\left(\frac{\varkappa + v}{\varkappa - v}\right)$$

5) Wird nun noch $\frac{f}{\varkappa} = \omega$ gesetzt, so erhält man gegenseitig:

$$\frac{\varkappa + \upsilon}{\varkappa - \upsilon} = e^{2\omega t}, \text{ woraus}$$

$$\upsilon = \varkappa \,.\, \frac{e^{2\omega t} - 1}{c^{2\omega t} + 1} \text{ wird.}$$

6) Multiplicirt man ferner die Gleichung $d\upsilon = \mathrm{f}dt \left(1 - \frac{\upsilon^2}{\varkappa^2}\right)$ durch $\varkappa^2\upsilon$, und setzt dann für υdt seinen Werth dx, so giebt dies

$$\varkappa^2\upsilon d\upsilon = \mathrm{f}dx\,(\varkappa^2 - \upsilon^2)$$

$$\text{also wird } 2\mathrm{f}dx = \frac{2\varkappa^2\upsilon d\upsilon}{\varkappa^2 - \upsilon^2}$$

folglich wenn man integrirt:

$$2\mathrm{f}x = C - \varkappa^2 \log(\varkappa^2 - \upsilon^2)$$

und da für $\upsilon = 0$, auch $x = 0$ ist, so hat man $C = \varkappa^2 \log \varkappa^2$, mithin $2\mathrm{f}x = \varkappa^2 \log\left(\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - \upsilon^2}\right)$.

7) Darin nun für υ seinen Werth aus (5) substituirt, giebt endlich:

$$2\mathrm{f}x = \varkappa^2 \log\left(\frac{(1 + e^{2\omega t})^2}{4e^{2\omega t}}\right)$$

$$\text{oder } x = \frac{M}{2gL} \,.\, \log\left(\frac{1 + e^{2\omega t}}{2e^{\omega t}}\right).$$

§. 89.

Wenn man in dem für die Geschwindigkeit υ gefundenen Ausdrucke Zähler und Nenner noch durch $e^{2\omega t}$ dividirt, so erhält man:

$$\upsilon = \varkappa \,.\, \frac{1 - e^{-2\omega t}}{1 + e^{-2\omega t}}$$

Läßt man nun hierin t unendlich wachsen, so nimmt $e^{-2\omega t}$ unendlich ab, folglich nähert sich v unendlich der Grenze $\varkappa$. Das Fallen der Körper in der Luft ist also zwar eine beschleunigte Bewegung, aber doch von der Art, daß sie sich immer mehr und mehr einem gleichförmigen Beharrungszustande nähert, bey dem die Geschwindigkeit $= \varkappa = \sqrt{\frac{(n-1)M}{nL}}$ ist. Leidet der Körper von der Luft einen beträchtlichen Widerstand, so sieht man leicht, daß seine Geschwindigkeit jener Grenze sehr bald nahe kommen, und dann während der übrigen Zeit seines Fallens nur noch geringen Aenderungen unterworfen seyn müsse.

§. 90.

Um doch wenigstens für eine kurze Dauer der Bewegung bey Körpern, die nach Verhältniß ihres Gewichtes nur geringen Widerstand finden, eine Vergleichung zwischen ihrer Fallhöhe in der Luft, und der im leeren Raume anzustellen, bringe man den für x gefundenen Ausdruck unter folgende Form:

$$x = \frac{M}{2gL} \log\left(\frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2}\right)$$

Nun ist $e^{-\omega t} = 1 - \omega t + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 - \frac{1}{2.3}\omega^3 t^3 + \text{u. s. w.}$

$$e^{\omega t} = 1 + \omega t + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{2.3}\omega^3 t^3 + \ldots$$

also wird: $\frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{2.3.4}\omega^4 t^4 + \ldots$

Diese Reihe $= 1 + z$ gesetzt, und davon den hyperbolischen Logarithmen genommen, giebt:

$$x = \frac{M}{2gL}\left(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \ldots\right)$$

und wenn man den Werth für z wieder herstellt:

$$x = \frac{M}{2gL}\left(\tfrac{1}{2}\omega^2t^2 - \tfrac{1}{12}\omega^4t^4 + \tfrac{1}{45}\omega^6t^6 \ldots\right)$$

Die Dichte der Luft kommt selten gegen die Dichte des Körpers in Betracht; man kann also hier um so eher i gegen n weglassen, wodurch $\omega = \frac{f}{\kappa} = 2g\sqrt{\frac{L}{M}}$ wird. Daher bekommt man endlich:

$$x = gt^2 - \frac{2g^3t^4 \,.\, L}{3M} + \frac{32g^5t^6L^2}{45M^2} - \ldots$$

§. 91.

Für eine Kugel ist nun z. B. $L = \frac{1}{2}\lambda\pi a^2 = 0{,}0262\pi a^2$ Loth, und wenn man ihre Dichte n auf die des Wassers bezieht, wovon der Kubikfuß nach gewöhnlicher Annahme 70 ℔ wiegt, so ist das Gewicht eines Kubikfußes ihrer Materie $= 70 \,.\, n$ ℔ $= 2240 \,.\, n$ Loth; dies mit ihrem Volumen $\frac{4}{3}\pi a^3$ multiplicirt, giebt ihre Masse $M = 8960 \,.\, \frac{1}{3}\pi a^3$, folglich $\frac{2Lg^3}{3M} = 0{,}000005848 \,.\, \frac{g^3}{na} = 0{,}0223 \,.\, \frac{1}{na}$; wodurch

$$x = 15{,}625\, t^2 - 0{,}0223 \,.\, \frac{t^4}{na} \,. \text{ wird.}$$

Exempel. Die Kugel bestehe aus Eisen, und habe $\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser, so ist $a = \frac{1}{4}$, $n = 7,8$; man erhält also

$$x = 15{,}625\, t^2 - 0{,}0114\, t^4.$$

Hiernach betrüge z. B. ihr Fallraum in der ersten Sekunde 15,613 Fuß.

§. 92.

Ist dagegen die Zeit des Fallens, und der Widerstand in Vergleichung gegen die Masse des Körpers groß genug, daß man 1 gegen $e^{2\omega t}$ weglassen kann, so verwandelt sich die Formel für x (§. 88.) in folgende:

$$x = \frac{M}{2gL}(\omega t - \log 2)$$

Man nehme noch zur Abkürzung das Gewicht, das dem Körper in der Luft übrig bleibt, als eine Größe, die unmittelbar gegeben ist, $= G$, so wird $\frac{G}{M} = 1 - \frac{1}{n}$ (§. 88. 2.), also $f = \frac{2gG}{M}$, $\varkappa = \sqrt{\frac{Mf}{2gL}} = \sqrt{\frac{G}{L}}$, und folglich $\omega = \frac{f}{\varkappa} = \frac{2g}{M}\sqrt{GL}$.

Dies für ω in voriger Formel substituirt, giebt:

$$x = t\sqrt{\frac{G}{L}} - \frac{M \log 2}{2gL}.$$

§. 93.

Es sey nun der Halbmesser einer Kugel $= a$, das absolute Gewicht eines Kubikfußes ihrer Materie $= D$, so hat man $L = \frac{1}{2}\lambda\pi a^2$, $M = \frac{4}{3}\pi a^3 D$, folglich $\frac{G}{L}$ $= \frac{2G}{\lambda\pi a^2}$, $\frac{M}{2gL} = \frac{4aD}{3g\lambda}$, und daher:

$$x = t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2} - \frac{4aD \log 2}{3g\lambda}}$$

Gesetzt also, man hätte von einer Kugel, die aus einer sehr leichten Materie bestände, die Zeit t beobachtet, in der sie von einer gegebenen Höhe x herabfällt, so ließe sich daraus gegenseitig der Koefficient λ auf eine leichte Art herleiten. Nennt man nemlich $\frac{t^2 G}{\pi a\, x^2} = A$, und $\frac{4aD \log 2}{3gx} = B$, so erhält man die Gleichung:

$$\lambda + B = \sqrt{2A\lambda}, \text{ oder}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda(A - B) + B^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$\lambda = A - B + A\sqrt{\left(1 - \frac{2B}{A}\right)} \text{ wird.}$$

§. 94.

Um den Gebrauch dieser sehr einfachen und bequemen Formel zu erläutern, und zugleich auch, eine nähere und richtigere Bestimmung des Werthes λ zu erhalten, weil ich davon auf die von Hawksbee in s. Exp. physico-mechan. Tom. I. pag. 27. angeführten Versuche mit hohlen Glaskugeln, die er vom Thurme der St. Paulskirkirche, eine Höhe von 220 engl. Fuß, herabfallen ließ, eine Anwendung machen; wobey ich noch erinnern muß, daß wegen der unvermeidlichen Fehler der Beobachtung die Zeiten des Falles in nachstehender Tafel durchgängig um 0,3″ geringer angenommen sind, als der Verf. sie angiebt.

Gewicht Gran.	Diam. engl. Zoll.	Zeit Sekunden.
510	5,1	8,2
642	5,2	7,7
599	5,1	7,7
515	5,0	$7,9\frac{1}{2}$
483	5,0	8,2

Was den ersten dieser Versuche betrift, so wird zuvörderst nach angestellter Reduktion des engl. Maaßes auf rheinl. und des Gewichtes auf ℔, wozu folgende Vergleichungen dienen:

1 ℔ = 7680 Gr., und 1 engl. Fuß = 0,97146 Rheinl. Fuß.

1) $x = 213,72$, $a = 0,206435$, $G = 0,066406$, $t = 8,2$, also $V = \frac{4}{3}\pi a^3 = 0,03685$, und dies mit dem Gewichte eines Kubikfußes Luft $= \frac{7}{85}$ ℔ multiplicirt, giebt den Verlust, den die Kugel in der Luft am Gewichte leidet $= 0,0030347$; daher wird ihr absolutes Gewicht $M = 0,0694407$, und $D = \frac{M}{V} = 1,88441$.

2) Um sich vorher erst zu überzeugen, daß man hier mit vollem Rechte 1 gegen $e^{2\pi t}$ weglassen könne, gebrauche man vorläufig den zuvor für λ angenommenen Werth (§. 85.), der hier $= 0,001638$ ist, weil

er sich auf die Einheit ℔ bezieht, so erhält man $\omega t = \frac{2gt}{M}\sqrt{\frac{1}{2}\lambda\pi a^2 G} = 9{,}956$, also $e^{2\omega t} = e^{19{,}912}$, eine Zahl, die aus 9 Ziffern besteht, und wogegen folglich 1 auf keine Weise in Betracht kommt.

4. Dies vorausgesetzt, wird nun die Rechnung folgende:

$$
\begin{array}{rl}
\log t^2 = & 1{,}8276278 \\
\log G = & 0{,}8222086 - 2 \\
\hline
\log t^2 G = & 0{,}6498364 \\
\text{Ferner } \log x^2 = & 4{,}6596904 \\
\log a^2 = & 0{,}6295668 - 2 \\
\log \pi = & 0{,}4971499 \\
\hline
\log \pi a^2 x^2 = & 3{,}7864071 \\
\log A = & 0{,}8634293 - 4 \\
A = & 0{,}00073018
\end{array}
$$

5) Da in der Formel für B, log 2 den natürlichen Logarithmen bezeichnet, also $= 0{,}6931472$ ist, so hat man

$$
\begin{array}{rl}
\log . l2 = & 0{,}8408254 - 1 \\
\log 4aD = & 0{,}1920188 \\
\hline
\log 4aDl2 = & 0{,}0328442 \\
\text{davon } \log 3gx = & 4{,}0007864 \text{ subtr.} \\
\hline
\text{bleibt: } \log B = & 0{,}0320578 - 4 \\
B = & 0{,}00010766.
\end{array}
$$

6) Hieraus erhält man $1 - \frac{2B}{A} = 0{,}70511$, und

$$A\sqrt{\left(1-\frac{2B}{A}\right)} = 0{,}00061314, \text{ folglich}$$

$$\lambda = A - B + A\sqrt{\left(1-\frac{2B}{A}\right)} = 0{,}0012357$$

7) Eben so giebt der zweyte Versuch

$\lambda =$ 0,0012873

der dritte: . . . 0,0012878

der vierte . . . 0,0012059

und der fünfte . . . 0,0012174

Nimmt man zwischen diesen fünf Werthen das Mittel, so bekommt man

$$\lambda = 0{,}001468.$$

8) demnach ist der Widerstand, den eine ebene Fläche von S Quad. Fußen leidet, die sich durch die Luft mit der Geschwindigkeit v senkrecht auf ihre Richtung bewegt, $= 0{,}0012468 \cdot v^2 S \cdot$ ℔.

9) und den eine Kugel leidet, deren Haldmesser = a Fuß, und Geschwindigkeit $= v$ ist, $= 0{,}0006234\, \pi a^2 v^2 = 0{,}00185847 \cdot a^2 \cdot v^2$.

§. 95.

Zum Beweise, daß der für λ gefundene Werth der Wahrheit sehr nahe kommen müsse, will ich noch von den Versuchen ähnlicher Art, die **Desaguillers** mit Kugeln von leichten Materien angestellt hat, folgenden als Exempel beyfügen:

Bey einer mit Luft angefüllten Blase, die 5,3 engl. Zoll im Durchmesser, und 128 Gr. am Gewichte hatte, verflossen $19\frac{3}{8}''$, ehe sie aus einer Höhe von 272 engl. Fuß, die nach unserm Maaße 264 Fuß betragen, zum Boden herabkam.

Unstreitig findet hier die Formel (§. 93.)

$$x = t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2} - \frac{4aD \log 2}{3g\lambda}}$$

ihre vollkommene Anwendung. Reducirt man nun die Data auf ihr gehöriges Maaß, so wird darinn $a = 0,2145$, $G = \frac{1}{60}$ ℔; also das erste Glied $t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2}} = 263,46$ Fuß.

Ferner $V = 0,041357$; daher der Verlust der Blase an ihrem absoluten Gewichte $= 0,0034058$, welcher zu G addirt, $M = 0,0200725$ ℔ giebt. Dadurch bekommt man $\log D = 0,6860488 - 1$, und hieraus das zweyte Glied $\frac{4aD \log 2}{3g\lambda} = 4,94$; folglich $x = 258,52$ Fuß.

Nun war nach der Angabe . . $x = 264$

also beträgt die Abweichung $5\frac{1}{2}$ Fuß.

Eine genauere Uebereinstimmung, als diese, darf man wohl gerade nicht erwarten, wenn man nur erwägt, daß die beobachtete Zeit leicht um $\frac{1}{2}''$ unrichtig seyn kann. Für $t = 20''$ erhielte man aus der Formel $x = 267$, folglich schon mehr, als der vorgeschriebene Fallraum ausmacht.

§. 96.

Aufgabe. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c in der Luft vertikal aufwärts geworfen; man sucht für eine gegebene Zeit t seine Geschwindigkeit v, und die Höhe, zu der er gestiegen ist.

Aufl. 1. Da hier beyde Kräfte (§. 88. 3.), sowohl das relative Gewicht des Körpers G, als auch der Widerstand der Luft Lv^2, seiner Bewegung entgegenwirken, so bekommt man:

$$Mdv = -2gdt\,(G + Lv^2),$$

oder, wenn wieder $\frac{2gG}{M} = f$, und $\frac{2gL}{M} = \frac{f}{\varkappa^2}$ gesetzt wird:

$$dv = -fdt\,(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2})$$

$$\text{also: } fdt = \frac{-dv}{1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}}$$

2) Man nenne $\frac{v}{\varkappa} = u$, so wird $dv = \varkappa du$, folglich:

$$\frac{fdt}{\varkappa} = \frac{-du}{1 + u^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{ft}{\varkappa} = C - \text{arc tang } u.$$

3) Für $t = 0$ ist nun $v = c$, also $C = \text{arc tang } \frac{c}{\varkappa}$; daher

$$\frac{ft}{\varkappa} = \text{arc tang } \frac{c}{\varkappa} - \text{arc tang } \frac{v}{\varkappa}.$$

4) Die Differenz zweyer Bogen, deren Tangenten p und q sind, gehört bekanntlich zur Tangente $\frac{p - q}{1 + pq}$;

setzt

setzt man also $p = \frac{c}{\varkappa}$, und $q = \frac{\upsilon}{\varkappa}$, so verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$\frac{ft}{\varkappa} = \text{arc tang}\, \frac{(c - \upsilon)\,\varkappa}{\varkappa^2 + c\upsilon},$$ woraus gegenseitig

$$\frac{(c - \upsilon)\,\varkappa}{\varkappa^2 + c\upsilon} = \text{tang}\, \frac{ft}{\varkappa},$$ und wenn man tang $\frac{ft}{\varkappa} = z$ setzt:

$$\upsilon = \varkappa \,.\left(\frac{c - \varkappa z}{\varkappa + cz}\right)$$ wird.

5) Multiplicirt man ferner die Gleichung (1) noch durch υ, und substituirt dann für υdt seinen Werth dx, so erhält man:

$$\upsilon d\upsilon = -\frac{fdx}{\varkappa^2}(\varkappa^2 + \upsilon^2),$$ also

$$\frac{2fdx}{\varkappa^2} = \frac{-2\upsilon d\upsilon}{\varkappa^2 + \upsilon^2},$$ und

$$\frac{2fx}{\varkappa^2} = C - \log\,(\varkappa^2 + \upsilon^2)$$

6) Weil für $x = 0$, $\upsilon = c$ ist, so wird in dieser Gleichung $C = \log\,(\varkappa^2 + c^2)$, folglich:

$$x = \frac{\varkappa^2}{2f} \,.\, \log\left(\frac{\varkappa^2 + c^2}{\varkappa^2 + \upsilon^2}\right).$$

7) Hierin für υ seinen Werth aus (4) gesetzt, giebt endlich:

$$x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log \frac{(\varkappa + cz)^2}{\varkappa^2(1 + z^2)},$$

oder, da $1 + z^2 = \mathrm{Sec}^2 \frac{ft}{\varkappa}$ ist:

$$x = \frac{\varkappa^2}{f} \cdot \log \left[\left(1 + \frac{c}{\varkappa} \tan \frac{ft}{\varkappa}\right) \cos \frac{ft}{\varkappa} \right].$$

§. 97.

Um zu finden, wieviel Zeit verfließt, bis der Körper seine größte Höhe erreicht, setze man in (4) $v = 0$, so bekommt man die ganze Dauer des Steigens $T = \frac{\varkappa}{f} \cdot \mathrm{arc\,tang} \frac{c}{\varkappa}$, oder, da $f = \frac{2gG}{M}$, und $\varkappa = \sqrt{\frac{G}{A}}$ ist:

$$T = \frac{M}{2g\sqrt{GL}} \cdot \mathrm{arc\,tang}\, c\sqrt{\frac{L}{G}}.$$

Bey Körpern von beträchtlichem specifischen Gewichte kann man, ohne daß es der nöthigen Schärfe nachtheilig werden könnte, $G = M$ setzen, wodurch $T = \frac{\sqrt{M}}{2g\sqrt{L}} \cdot \mathrm{arc\,tang}\, c\sqrt{\frac{A}{M}}$ wird.

Löst man nun diesen Ausdruck nach der bekannten Formel

$$\mathrm{arc\,tang}\, u = u - \tfrac{1}{3} u^3 + \tfrac{1}{5} u^5 - \text{u. s. f.}$$

in eine Reihe auf, so erhält man endlich:

$$T = \frac{c}{2g} \left[1 - \frac{c^2 L}{3M} + \frac{c^4 L^2}{5M^2} - \ldots \right]$$

Exempel. Eine eiserne Kugel von 6 Zoll Durchmesser werde mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in die Höhe geworfen; man fragt, wie lange sie steigen werde?

Hier ist $L = 0{,}0006234\ \pi a^2$, $M = \frac{4}{3}\pi a^3 D$,

$D = 546$ ℔, $a = \frac{1}{4}$; also $\frac{c^2 L}{M} = 0{,}03425$, $\frac{c^4 L^2}{M^2} =$

$0{,}00117$, und $T = \frac{c}{2g} \times 0{,}98881 = 3{,}164''$.

Im luftleeren Raume wäre $T = 3{,}2''$; daher bewirkt der Widerstand der Luft in der ganzen Zeit des Steigens einen Unterschied von $0{,}036''$.

§. 98.

Man setze auch in der für x (§. 96. 6.) gefundenen Formel $v = 0$, so erhält man für die größte Höhe, zu der der Körper hinaufsteigt

$$x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log \left(1 + \frac{c^2}{\varkappa^2}\right).$$

Diesen Ausdruck in eine Reihe verwandelt, und wieder $f = 2g$; $\varkappa = \sqrt{\frac{M}{L}}$ gesetzt, giebt:

$$x = \frac{c^2}{4g} \left[1 - \frac{c^2 L}{2M} + \frac{c^4 L^2}{3M^2} - \frac{c^6 L^3}{4M^3} + \ldots\right]$$

So würde im vorigen Exempel $x = 0{,}98324 \cdot \frac{c^2}{4g} =$ $157{,}2$ Fuß, statt daß im leeren Raume $x = \frac{c^2}{4g} = 160$ Fuß betrüge.

Vergleichung zwischen dem Steigen und nachherigen Fallen der Körper in der Luft.

§. 99.

Im leeren Raume ist das Steigen und Fallen der

Körper eine zusammenhängende Bewegung, bey der die Geschwindigkeit nach einerley Gesetze erst bis zu o abnimmt, und dann ins Negative übergeht. In der Luft hingegen hört diese Verbindung auf; da ist nemlich, so lange der Körper steigt, die auf ihn wirkende Kraft $= G + Lv^2$, so bald aber seine Geschwindigkeit = o geworden ist, verwandelt sich die Kraft plötzlich in $G - Lv^2$, die offenbar nicht mehr so vom negativen v abhängt, als erstere vom positiven abhing. Also folgen beyde Bewegungen, das Steigen und das Fallen, in der Luft ganz verschiedenen Gesetzen, und müssen daher abgesondert von einander betrachtet werden.

§. 100.

1) Es sey nun, wie vorhin, die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers in $A = c$; seine Geschwindigkeit in P, wenn er um den Raum $AP = x$ gestiegen ist, $= v$, und seine größte Höhe, die er erreicht $= h$, so ist

$$x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log\left(\frac{\varkappa^2 + c^2}{\varkappa^2 + v^2}\right) \text{ (§. 96. 6.)}$$

$$\text{und } h = \frac{\varkappa^2}{2f} \log\left(1 + \frac{c^2}{\varkappa^2}\right)$$

$$\text{also } BP = h - x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log\left(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)$$

2) Ferner sey seine Geschwindigkeit an eben der Stelle P beym Herabfallen $= v'$, so erhält man aus der Formel §. 97. 6., wenn man darin $h - x$ statt x, und v' statt v setzt:

$$h - x = \frac{\varkappa^2}{2f} \log\left(\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - v'^2}\right)$$

3) Beyde Werthe von $h - x$ gleich gesetzt, geben also:

$$1 + \frac{v^2}{\varkappa^2} = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 - v'^2}$$

$$\text{oder } \left(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{\varkappa^2}\right) = 1$$

$$\text{daher wird } v^2 - v'^2 - \frac{v^2 v'^2}{\varkappa^2} = 0.$$

4) Aus dieser Gleichung bekommt man:

$$v'^2 = v^2 : \left(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)$$

$$\text{und } v' = v : \sqrt{\left(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)}$$

Man sieht also offenbar, daß an einerley Stelle der Vertikale AB die Geschwindigkeit des Körpers beym Herabfallen jedesmal geringer ist, als beym Hinaufsteigen, und daß der Unterschied zwischen beyden Geschwindigkeiten desto mehr beträgt, je größern Widerstand der Körper in Verhältniß gegen seine Masse leidet.

5) Nennt man die Geschwindigkeit, womit der Körper in A zurückkehrt $= c'$, so wird

$$c' = c : \sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{\varkappa^2}\right)} = c : \sqrt{\left(1 + \frac{cL}{G}\right)}$$

In dem §. 97. angenommenen Falle wäre z. B. $c' = c : \sqrt{(1{,}03425)} = 0{,}9833 \cdot c = 98{,}33$ Fuß.

§. 101.

Die Zeit des Steigens durch AB heiße $= T$, durch den Theil PB $= t'$, und die des Fallens durch eben den Raum BP $= t''$, so ist zuvörderst $T = \frac{\varkappa}{f} . \text{arc tang} \frac{c}{\varkappa}$ (§. 97.), und daher: $t = T - \frac{\varkappa}{f} . \text{arc tang} \frac{v}{\varkappa}$ (§. 96. 3.); folglich, da $t' = T - t$ ist, $t' = \frac{\varkappa}{f} . \text{arc tang} \frac{v}{\varkappa}$.

Man setze nun $v = \varkappa \text{ Cot } 2\xi$, so hat man $\frac{v}{\varkappa} = \text{tang} (\frac{1}{2}\pi - 2\xi)$, also $t' = \frac{\varkappa}{f} (\frac{1}{2}\pi - 2\xi)$.

Ferner wird $\sqrt{(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2})} = \sqrt{(1 + \text{Cot } 2\xi^2)} = \text{Cosec} . 2\xi$, folglich $v' = \varkappa \text{ Cot } 2\xi . \text{Sin } 2\xi = \varkappa \text{ Cos } 2\xi$. Dies für v' in die Formel §. 88. 4. substituirt, giebt:

$$t'' = \frac{\varkappa}{2f} \log \left(\frac{1 + \text{Cos } 2\xi}{1 - \text{Cos } 2\xi}\right) = \frac{\varkappa}{2f} \log \left(\frac{2 \text{ Cos } \xi^2}{2 \text{ Sin } \xi^2}\right)$$
$$= \frac{\varkappa}{f} \log \text{Cot } \xi.$$

Für $v = c$, sey $\xi = \gamma$, so wird die Zeit des Steigens durch AB $= \frac{\varkappa}{f} (\frac{1}{2}\pi - 2\gamma)$, und die des Fallens durch AB $= \frac{\varkappa}{f} \log \text{ Cot } \gamma$.

Aus beyden zusammen genommen entspringt also die ganze Zeit, die vom Aufsteigen des Körpers aus A bis zu seiner Rückkehr nach A verfließt, $= \frac{\varkappa}{f}(\frac{1}{2}\pi - 2\gamma + \log \mathrm{Cot}\,\gamma)$.

Diese Formel giebt **Lambert** in den Mem. de l'acad. de Berlin 1765.

Exempel. In §. 97. erhält man $\frac{c}{\varkappa} = \mathrm{Cot}\,2\gamma = 0{,}18507$, also $90^\circ - 2\gamma = 10^\circ 29'$, und diesen Winkel in einen Bogen verwandelt, giebt: $\frac{1}{2}\pi - 2\gamma = 0{,}1829687$. Ferner wird:

$\log \mathrm{nat.}\ \mathrm{Cot}\,\gamma = 0{,}1839982$, und $\frac{\varkappa}{f} = 17{,}29497$, folglich die ganze Zeit des Steigens und Fallens $= 0{,}366967 \cdot \frac{\varkappa}{f} = 6{,}3466''$.

Ueber die Bahn geworfener Körper in der Luft.

§. 102.

Es bleibt jetzt noch zu bestimmen übrig, welchen Einfluß der Widerstand der Luft auf die Bewegung des Körpers hat, wenn ihm Anfangs die Geschwindigkeit c nach irgend einer schrägen Richtung $A\varkappa$ ertheilt wird, die mit der Horizontale einen gegebenen Winkel I macht.

Fig. 7. Man setze, wie im §. 65., der Körper habe während der Zeit t von seiner Bahn den Bogen AM $= s$ zurückgelegt, und sey nun gegenwärtig im Punkte M der Vertikale MP $= y$, die von der durch A gehenden Vertikale um AP $= x$ entfernt liegt. Ferner sey

seine Geschwindigkeit an diesem Orte $= v$, und der Winkel mMI, den seine jetzige Richtung, oder das Element Mm, das er jetzt zu durchlaufen im Begriff ist, mit der Horizontale MI macht, $= \varphi$.

1) So wirken auf ihn in diesem Augenblicke zwey Kräfte, sein relatives Gewicht G nach der Vertikale MP, und der Widerstand der Luft $= Lv^2$, nach einer Richtung, die der seinigen entgegengesetzt ist, und also ebenfalls von der Horizontale um den Winkel φ abweicht.

2) Um diese Kräfte auf zwey andere zurück zu führen, deren Richtungen mit AP und PM parallel sind (§. 58.), zerlege man die Kraft Lv^2 in eine nach $IM = Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi$, und in eine nach $MP = Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi$; alsdann giebt letztere in Verbindung mit G die vertikale Kraft $Q = - G - Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi$, und erstere allein die horizontale Kraft $P = - Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi$; man erhält also die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = - \frac{2gLv^2 \operatorname{Cos} \varphi}{M}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M}$$

$$= - 2g \left(\frac{G}{M} + \frac{Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi}{M}\right) \text{ und } v = \frac{ds}{dt}.$$

3) Erstere Gleichung durch tang φdt^2 multiplicirt, und von der zweyten, durch dt^2 multiplicirt, abgezogen, giebt:

$$d^2y - \operatorname{tang} \varphi d^2x = - \frac{2gdt^2 \,.\, Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi}{M}$$

4) Nun ist $dy = \operatorname{tang} \varphi dx$, also d^2y tang φd^2x

$+\frac{dxd\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2}$; wird dies in voriger Gleichung für d^2y substituirt, so bekommt man:

$$\frac{dxd\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2} = -\frac{2gGdt^2}{M}.$$

5) Da ferner $dx = \mathrm{Cos}\,\varphi ds$, so wird $vdt = ds = \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$, wodurch die erstere Gleichung aus (2) sich in folgende verwandelt:

$$d^2x = -\frac{2gLdx^2}{M\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

6) Diese mit der vorhergehenden multiplicirt, giebt:

$$\frac{2gGd^2xdt^2}{M} = \frac{2gLdx^2d\varphi}{M\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3}, \text{ oder}$$

$$\frac{Gdt^2}{L}\cdot\frac{d^2x}{dx^3} = \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^3}$$

wovon die Integralgleichung:

$$C - \frac{Gdt^2}{2Ldx^2} = \int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^3} \text{ ist.}$$

7) Also wird $dt^2 = \frac{2Ldx^2}{G}\cdot\left(C - \int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^3}\right)$, und wenn man dies für dt^2 in der Gleichung (4) substituirt:

$$\frac{dxd\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2} = -\frac{4gLdx^2}{M}\cdot\left(C - \int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^3}\right),$$

woraus für dx und dy folgende Werthe entspringen:

$$dx = -\frac{Md\varphi}{4gL\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\left(C - \int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^3}\right)} \text{ und}$$

$$dy = \tang \varphi dx = - \frac{M \tang \varphi d\varphi}{4gL \operatorname{Cos} \varphi^2 (C - \int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^3})}$$

8) Man setze noch $\tang \varphi = u$, so wird $du = \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^2}$, folglich $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^3} = \int du \operatorname{Sec} \varphi = \int du \sqrt{(1 + u^2)}$. Dadurch bekommen die für dx und dy gefundenen Ausdrücke endlich folgende Gestalt:

$$dx = - \frac{Mdu}{4gL [C - \int du \sqrt{(1 + u^2)}]},$$

und $$dy = - \frac{Mudu}{4gL [C - \int du \sqrt{(1 + u^2)}]}$$

§. 103.

Die Wurzelgröße $\sqrt{(1 + u^2)}$ läßt sich bekanntlich in folgende Reihe auflösen:

$$\sqrt{(1 + u^2)} = 1 + \tfrac{1}{2} u^2 - \tfrac{1}{8} u^4 + \tfrac{1}{16} u^6 - \tfrac{5}{128} u + \ldots$$

Diese mit du multiplicirt, und dann integrirt, giebt:

$$\int du \sqrt{(1 + u^2)} = u + \tfrac{1}{6} u^3 - \tfrac{1}{40} u^5 + \tfrac{1}{112} u^7 - \tfrac{5}{1152} u^9 + \ldots$$

Setzt man daher $\int du \sqrt{(1 + u^2)} = \varkappa u$, so wird:

$$\varkappa = 1 + \tfrac{1}{6} u^2 - \tfrac{1}{40} u^4 + \tfrac{1}{112} u^6 - \ldots$$

Wenn u kleiner als 1 ist, so läuft diese Reihe schnell zusammen, und selbst ihr zweytes Glied wird schon in Vergleichung gegen das erste gering, so daß in solchen Fällen $\varkappa$ von 1 nur wenig verschieden seyn kann. Für $\varphi = 30°$, oder $u = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ wird doch nur $\varkappa = 1{,}05318$, ob hier gleich u der Einheit schon ziemlich nahe kommt.

So lange also φ unter 30° bleibt, wächst dieser Koefficient in Vergleichung des Winkels äußerst langsam: die ganze Aenderung nemlich, die $\varkappa$ erleidet, während der Winkel φ von 0° bis zu 30° anwächst, beträgt nicht mehr, als etwa $\frac{1}{20}$ seines anfänglichen Werthes.

Dergleichen Größen nun, die so langsamen Aenderungen unterworfen sind, kann man allezeit da, wo nicht die allerstrengste Genauigkeit beobachtet werden muß, als beständige Größen in den Kalkul einführen, wofern man ihnen nur einen Werth beylegt, der zwischen den verschiedenen Werthen, die sie nach und nach bekommen können, das Mittel hält.

§. 104.

Der Winkel φ ist im aufsteigenden Bogen der Kurve abnehmend, und daher jederzeit kleiner als der anfängliche Winkel I. Da nun dieser Bogen bey weitem den größten Theil der Bahn des Körpers ausmacht, so läßt sich in Fällen, wo I nicht über 30° beträgt, die eben gedachte Voraussetzung mit Sicherheit anwenden. Dieser zu Folge wird also, wenn man noch $\frac{M}{4gL} = f$ setzt:

$$dx = -\frac{fdu}{C - \varkappa u} \text{ und}$$

$$dy = -\frac{fudu}{C - \varkappa u}, \text{ oder}$$

$$\frac{\varkappa^2 dy}{Cf} = \frac{\varkappa du}{C} - \frac{\varkappa du}{C - \varkappa u}$$

wovon die Integralgleichungen folgende sind:

$$x = A + \frac{f}{\varkappa} \cdot \log (C - \varkappa u)$$

$$y = B + \frac{fu}{\varkappa} + \frac{Cf}{\varkappa^2} \log (C - \varkappa u).$$

§. 105.

Die beständige Größe C läßt sich auf folgende Art bestimmen:

1) Es ist $dx = ds \operatorname{Cos} \varphi$, also $\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \operatorname{Cos} \varphi = v \operatorname{Cos} \varphi$; setzt man daher in der Gleichung §. 102. 6., $\varphi = I$, so wird darin $\frac{dx}{dt} = c \operatorname{Cos} I$, folglich

$$C - \frac{G}{2Lc^2 \operatorname{Cos} I^2} = \text{dem Werthe des Integrals} \int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^3} \text{ für } \varphi = I.$$

2) Um $\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^3}$ oder $du \sqrt{(1 + u^2)}$ zu integriren, setze man $\sqrt{(1 + u^2)} = z - u$, so erhält man $1 = z^2 - 2uz$, und daraus $u = \frac{z^2 - 1}{2z}$, also $du = \frac{(z^2 + 1)\, dz}{2z^2}$; ferner $z - u = \frac{z^2 + 1}{2z}$, folglich:

$$du \sqrt{(1 + u^2)} = (z - u)\, du = \frac{(z^2 + 1)^2 dz}{4z^3},$$

und $\int du \sqrt{(1 + u^2)} = \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{8} \left(\frac{z^4 - 1}{z^2}\right)$. Nun ist $z^4 = (1 + 2uz)^2 = 1 + 4uz + 4u^2z^2$, und $\frac{z^4 - 1}{z^2}$

$$= \frac{4uz + 4u^2z^2}{1 + 2uz} = 4uz - \frac{4u^2z^2}{z^2} = 4u(z - u)$$

$= 4u\sqrt{(1 + u^2)}$, daher wird:

$$\int du\sqrt{(1 + u^2)} = \tfrac{1}{2}u\sqrt{(1 + u^2)} + \tfrac{1}{2}\log [u + \sqrt{(1 + u^2)}].$$

3) Setzt man wieder tang ϕ für u, so bekommt man:

$$u + \sqrt{(1 + u^2)} = \tang \phi + \mathrm{Sec}\,\phi = \frac{1 + \mathrm{Sin}\,\phi}{\mathrm{Cos}\,\phi} =$$

$$\frac{1 + \mathrm{Cos}\,(90^\circ - \phi)}{\mathrm{Sin}\,(90^\circ - \phi)} = \frac{2\,\mathrm{Cos}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\phi)^2}{2\,\mathrm{Sin}(45^\circ - \frac{1}{2}\phi)\,\mathrm{Cos}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\phi)}$$

$= \mathrm{Cot}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\phi) = \mathrm{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$, wodurch endlich $\int \frac{d\phi}{\mathrm{Cos}\,\phi^3} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\phi\ \mathrm{Sec}\,\phi + \frac{1}{2}\log\,\mathrm{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$ wird.

4) Also ist $C = \frac{G}{2Lc^2\,\mathrm{Cos}\,I^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\ I\ \mathrm{Sec}\ I + \frac{1}{2}\log\,\mathrm{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}I)$.

§. 106.

Es kommt jetzt noch auf die Entscheidung der Frage an, welchen Werth von u oder ϕ man für den mittlern anzunehmen habe? Wofern die Geschwindigkeit des Wurfes c einigermaßen groß ist, so sieht man leicht, daß der Körper den größten Theil des aufsteigenden Bogens hindurch von seiner ersten Richtung abweichen, und folglich der Winkel ϕ nur erst nahe am Scheitel der Bahn merklich kleiner als I werden könne; also darf man hier keinen andern bestimmten Werth für

φ, als den anfänglichen $= \mathrm{I}$ zulassen. Im niedersteigenden Bogen hingegen ist φ Anfangs $= 0$, wird nachher $= -\mathrm{I}$, und wächst dann während der übrigen Zeit des Fallens noch weiter ins Negative fort, so daß offenbar kein merklicher Fehler entstehen kann, wenn man in diesem Theile der Bahn den mittlern Werth von $\varphi = -\mathfrak{J}$ setzt. Beyde Winkel nun, sowohl I als $-$ I, haben einerley Tangente mit entgegengesetzten Zeichen, und bestimmen folglich $\varkappa$ auf eine und dieselbe Art. Es wird nemlich für beyde $\varkappa = 1 + \frac{1}{6} \operatorname{tang} \mathrm{I}^2 - \frac{1}{40} \operatorname{tang} \mathrm{I}^4 + \ldots$, oder nach dem im §. 105. 3. gefundenen Integralausdrucke:

$$\varkappa = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sec} \mathrm{I} + \frac{\log \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2}\mathrm{I})}{2 \operatorname{tang} \mathrm{I}}$$

wodurch folgende Gleichung entsteht:

$$C - \varkappa \operatorname{tang} \mathrm{I} = \frac{G}{2Lc^2 \operatorname{Cos} \mathrm{I}^2}.$$

§. 107.

Man setze in den für x und y (§. 104.) gefundenen Formeln $\varphi = \mathrm{I}$, oder $\varkappa = \operatorname{tang} \mathrm{I}$, so wird

$$0 = A + \frac{f}{\varkappa} . \log (C - \varkappa \operatorname{tang} \mathrm{I}), \text{ und}$$

$$0 = B + \frac{f \operatorname{tang} \mathrm{I}}{\varkappa} + \frac{Cf}{\varkappa^2} \log (C - \varkappa \operatorname{tang} \mathrm{I})$$

und daraus:

$$x = \frac{f}{\varkappa} \log \frac{C - \varkappa \operatorname{tang} \varphi}{C - \varkappa \operatorname{tang} \mathrm{I}}, \text{ und}$$

$$y = \frac{f}{\varkappa} (\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \mathrm{I}) + \frac{Cf}{\varkappa^2} \log \frac{C - \varkappa \operatorname{tang} \varphi}{C - \varkappa \operatorname{tang} \mathrm{I}}.$$

Wenn man nun erstere Gleichung durch C, letztere durch $\varkappa$ multiplicirt, und dann beyde von einander subtrahirt, so bleibt:

$$\varkappa y - Cx = f(\tang \varphi - \tang I)$$

Ferner erhält man aus der ersten Gleichung:

$$\varkappa \tang \varphi = C - (C - \varkappa \tang I)\, e^{\frac{\varkappa x}{f}}$$

$$\text{oder } \varkappa \tang \varphi = C - \frac{G e^{\frac{\varkappa x}{f}}}{2Lc^2 \operatorname{Cos} I^2}$$

Dies für tang φ in die vorige Gleichung substituirt, giebt endlich:

$$\varkappa y - Cx = \frac{Gf(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})}{2\varkappa Lc^2 \operatorname{Cos} I^2},$$

oder, wenn für C sein Werth aus §. 105. gesetzt wird:

$$y = x\left(\tang I + \frac{G}{2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2}\right) + \frac{Gf(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})}{2L\varkappa^2 c^2 \operatorname{Cos} I^2}$$

welches eben die Formel ist, die Bezout in s. Cours de Math. à l'usage du corps roy. de l'artill. P. IV. durch einen ähnlichen, wiewohl etwas mühsamern, Kalkul herausbringt.

§. 108.

Setzt man hierin $y = 0$, so bekommt man:

$$0 = x\left(\tang I + \frac{G}{2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2}\right) + \frac{Gf}{2L\varkappa^2 c^2 \operatorname{Cos} I^2}\left(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}}\right)$$

eine Gleichung mit zweyen Wurzeln $x = 0$, und $x =$

AB, wovon letztere sich auf den zweyten Durchschnittspunkt B der Kurve mit der Horizontale AB bezieht, und also die Weite des ganzen Wurfes angiebt.

Man kann diese nicht unmittelbar aus der Gleichung herleiten; hat man aber bereits einen Werth b gefunden, der ihr nahe kommt, so daß, wenn $x = b + i$ gesetzt wird, der unbekannte Theil i nur noch in Vergleichung gegen b gering ist, so läßt sich i auf folgende Art sehr leicht bestimmen:

1) Man nenne der Kürze wegen die zu x und $1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}}$ gehörigen Koefficienten A und B, oder drücke die obige Gleichung so aus:

$$o = Ax + B(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}}),$$

so wird, wenn man darin $x = b + i$ setzt:

$$o = Ab + Ai + B(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}} \cdot e^{\frac{\varkappa i}{f}})$$

2) Nun hat man bekanntlich für $e^{\frac{\varkappa i}{f}}$ folgende Reihe:

$$e^{\frac{\varkappa i}{f}} = 1 + \frac{\varkappa i}{f} + \frac{\varkappa^2 i^2}{2f^2} + \frac{\varkappa^2 i^3}{6f^3} + \ldots$$

wovon man hier, weil i klein, und f sehr groß ist (§. 104.), bloß die zwey ersten Glieder zu nehmen braucht. Diese Voraussetzung giebt also $e^{\frac{i}{f}} = 1 + \frac{\varkappa i}{f}$, und daher:

o =

$$o = Ab + Ai + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}}\right) - \frac{\varkappa i B}{f} \cdot e^{\frac{\varkappa b}{f}}$$

3) In dieser Gleichung ist $Ab + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}}\right)$ der Werth von y für $x = b$, also bekannt. Man setze ihn $= d$, so erhält man endlich:

$$\left(\frac{\varkappa B}{f} \cdot e^{\frac{\varkappa b}{f}} - A\right) i = d, \text{ oder}$$

$$i = \frac{df}{\varkappa B \cdot e^{\frac{\varkappa b}{f}} - Af}$$

Exempel. In Huttons math. and phil. tracts. 9. Abh. findet sich unter einer Menge von Angaben ballistischer Versuche pag. 263. auch eine Tafel, die außer der anfänglichen Geschwindigkeit der Kugel zugleich die Schußweite für mehrere Richtungswinkel und Ladungen enthält. Die Geschwindigkeiten sind zwar nicht als ganz zuverlässig anzusehen, da sie der Verf. nach Robins Methode aus Beobachtungen des Pendelbogens bestimmt hat, und die Rechnung noch nach der gewöhnlichen Formel anstellt, die nach Lamberts Bemerkung der Sache nicht völlig angemessen ist; indeß will ich doch eine dieser Angaben zur Erläuterung des vorigen Kalkuls hier beyfügen:

Eine Kugel von 1,96 engl. Zoll Durchmesser, und 16 Unzen 8½ Drachmen Gewicht bekam unter einem Erhöhungswinkel von 15° eine Geschwindigkeit von 1234 engl. Fuß. Hier hat man also $c = 1198{,}73$ $a = 0{,}07934$; $G = 1{,}0651$ Pfund, $\varkappa = 1{,}0118405$, und $L = 0{,}0006234 \pi a^2$, folglich

$$\log L = 0{,}0909011 - 5$$
$$\log 2\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2 = 6{,}4335100$$
$$\log 2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2 = 1{,}5244111$$
$$\log G = 0{,}0273920$$
$$\log \frac{G}{2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2} = 0{,}5029809 - 2,$$

dem die Zahl $= 0{,}0318405$ zugehört;
dazu tang I $= 0{,}2679492$ addirt,

giebt A $= 0{,}2997897$.

Ferner wird, wenn man hier $M = G$ annimmt, $\log f = 3{,}1406109$, und daraus $\log B = 1{,}6384796$. Setzt man nun $x = 4800$, so erhält man $\frac{xx}{f} \log e = 0{,}43429448$.

$\frac{xx}{f} = 1{,}5259023$, folglich $e^{\frac{xx}{f}} = 33{,}5662$, und $B\left(1 - e^{\frac{xx}{f}}\right)$
$= -1416{,}6$
$Ax = 1439{,}0$

also $d = 22{,}4$,

$i = \frac{2240}{77} = 29$ Fuß, und $x = 4829$ Fuß.

Die beobachtete Schußweite ist dagegen nur 4660 engl. oder 4527 rheinl. Fuß: es ist aber leicht möglich, daß diese Abweichung allein in der unrichtigen Angabe der Geschwindigkeit ihren Grund hat.

§. 109.

Eine zweyte Näherungsmethode, die, wie die vorhergehende, zuerst von Herrn **Bezout** angegeben, nachmals aber durch Herrn **Krafts** Bemühungen *) zu einer größern Vollkommenheit gebracht ist, besteht darin, daß man für das Integral $\int du \sqrt{(1 + u^2)}$ die Formel $u + \varkappa u^3$ annimmt, und darin dem Koefficienten $\varkappa$ wieder einen mittlern Werth beylegt. Vergleicht man nun diese Formel mit der für $\int du \sqrt{(1 + u^2)}$ (§. 112.) gefundenen Reihe, so bekommt man

$$\varkappa = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} u^2 + \tfrac{1}{112} u^4 - \ldots$$

also wird z. B.

*) Man sehe hierüber dessen Abhandlung in den Actis Acad. Sc. Petrop. 1780 P. I. pag. 154 u. f.

für $\varphi = 0$ oder $u = 0$, $\varkappa = 0{,}16666$ ..
... 30° ... $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ... $0{,}15$
... 45° ... 1 ... $0{,}14779$,

woraus man leicht sieht, daß die Größe $\varkappa$ in der Bedeutung, wie sie hier gebraucht wird, noch weit geringeren Aenderungen unterworfen sey, als in der erstern, und daß folglich dies Verfahren nicht allein eine weit größere Genauigkeit gewähre, als das vorige, sondern auch bey größern Erhöhungswinkeln noch mit gleicher Sicherheit sich anwenden lasse; ich kann mich aber, wegen der umständlichern Rechnung, die damit verbunden ist, nicht darauf einlassen, es hier weiter auseinander zu setzen, und muß deshalb auf die erwähnte Abhandlung verweisen.

Fünftes Kapitel.

Zurückführung der mechanischen Gesetze auf das Gleichgewicht.

§. 110.

Wenn ein Körper, dessen Masse $= M$ ist, fortdauernd von einer Kraft P nach einerley Richtung getrieben wird, und dadurch nach Verlauf einer bestimmten Zeit t die Geschwindigkeit v bekommt, so hat man (§. 50. 9.)

für die augenblickliche Aenderung dieser Geschwindigkeit folgende Gleichung:

$$dv = \frac{2gPdt}{M}$$

Gegenseitig entspringt hieraus die Formel:

$$P = \frac{Mdv}{2gdt}$$

für die Kraft, die in jedem Augenblicke die Bewegung des Körpers beschleunigen oder verzögern muß, wenn seine Geschwindigkeit nach irgend einem Gesetze wachsen oder abnehmen soll.

§. 111.

Man setze nun, der Körper erhalte unter gewissen Umständen eben diese Bewegung durch eine andere Kraft V; so folgt nothwendig, daß beyde Kräfte V und P, einzeln genommen, einerley Wirkung auf den Körper ausüben, und also in jedem bestimmten Zeitpunkte äquipollent seyn müssen. Wird daher die Kraft P nach entgegengesetzter Richtung auf den Schwerpunkt des Körpers angebracht, so entsteht unter den angenommenen Bedingungen zwischen ihr und der Kraft V Gleichgewicht.

Diese Betrachtung leitet auf eine sehr einfache Auflösung folgender Aufgabe:

§. 112.

Die Masse M erhält durch eine gegebene Kraft V, die nicht unmittelbar auf ihren Schwerpunkt wirkt, eine fortgehende Bewegung nach irgend einer geraden Linie;

man fragt, wie unter diesen Umständen ihre Geschwindigkeit v für eine gegebene Zeit t zu bestimmen sey.

Aufl. Man suche die Kraft P, die gegen die Richtung der Masse auf ihren Schwerpunkt angebracht, der Kraft V das Gleichgewicht hält; so ist diese nach entgegengesetzter Richtung der Kraft V äquipollent, und bestimmt also das Gesetz der Bewegung. Es wird nemlich, wenn man sie gefunden hat: $dv = \frac{2gPdt}{M}$.

§. 113.

Fig. 2. **Exempel I.** Die Masse gleite von einer schiefen Ebene CA herab, die gegen die Horizontale unter dem Winkel CAB = I geneigt ist.

Hier sind unter V zwey Kräfte zugleich begriffen: das absolute Gewicht der Masse = M, und der Widerstand, den das Reiben am Boden nach der Richtung AC hervorbringen. Beyden soll nun die Kraft P, im Schwerpunkte der Masse nach der Richtung AC angebracht, das Gleichgewicht halten; also hat man (Statik §. 320.):

$$P = M\,(\mathrm{Sin}\,I - \lambda\,\mathrm{Cos}\,I)$$

folglich $dv = \frac{2gPdt}{M} = 2gdt\,(\mathrm{Sin}\,I - \lambda\,\mathrm{Cos}\,I)$

und in der Voraussetzung, daß die Friktion von der Geschwindigkeit v unabhängig sey:

$$v = c + 2gt\,(\mathrm{Sin}\,I - \lambda\,\mathrm{Cos}\,I)$$

wo c die anfängliche Geschwindigkeit bedeutet.

§. 114.

II. Auf einer vertikalstehenden Schraube liegt eine Last M, die durch die Kraft V vermittelst eines Hebelarmes, dessen Länge = f ist, in die Höhe gehoben wird; man sucht für eine gegebene Zeit t die Geschwindigkeit derselben.

Man setze die Höhe der Schraubengänge = h; ferner, um zugleich die Friktion in Rechnung zu bringen, den mittlern Halbmesser der Schraube = r, den Winkel NMO = ϑ (Statik §. 243.), $\frac{h}{2\pi r} = \tang \alpha$, $\sqrt{(\tang \alpha^2 + \tang \vartheta^2)} = \tang I$, und endlich die Verhältnißzahl $\lambda = \tang \omega$; so ist der Kraft V im Schwerpunkte der Last die Kraft $P = \frac{2\pi V f \tang I}{h \tang (I + \omega)}$ äquipollent (§. 322.).

Hiervon noch das Gewicht der Masse abgezogen, das nach entgegengesetzter Richtung wirkt, bleibt die Kraft P — M übrig, wodurch die Last unmittelbar nach vertikaler Richtung aufwärts getrieben wird. Man erhält also:

$$dv = 2g dt \left(\frac{P - M}{M}\right) = 2g dt \left(\frac{P}{M} - 1\right)$$

und, wenn V, folglich auch P, unveränderlich ist:

$$v = c + 2gt \left(\frac{P}{M} - 1\right) = c + 2gt \left[\frac{2\pi V f \tang I}{h M \tang (I + \omega)} - 1\right].$$

§. 115.

Es sey die Masse M noch mit einer zweyten Masse N in eine solche Verbindung gebracht, daß bey ihren

Bewegungen eine gegenseitige Rückwirkung der einen auf die andere statt finde. Durch gegebene Kräfte erhalte jede von ihnen ihre eigene Bewegung nach irgend einer geraden Linie, und zwar sey nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit der erstern $= v$, die der letztern $= u$; so erhellet aus §. 110., daß diese Bewegungen nach eben den Gesetzen erfolgen würden, wenn statt der vorhandenen Kräfte auf die Schwerpunkte der beyden Massen unmittelbar die Kräfte $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ und $Q = \frac{Ndu}{2gdt}$ wirkten. Also müssen diese den gegebenen Kräften in einerley Zeitpunkte der Bewegung äquipollent seyn, und folglich nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Die Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen, sind zur Bestimmung der Geschwindigkeiten v und u allemal hinreichend, wofern man nur die übrigen Bedingungen der Aufgabe damit gehörig zu verbinden sucht. In einzelnen Fällen wird sich dies deutlicher zeigen lassen.

§. 116.

Fig. 14. **Aufgabe.** Die beyden Massen M und N hängen an zweyen mit einander verbundenen Rollen, deren Halbmesser $CA = a$, und $CB = b$ sind. Erstere hat das Uebergewicht, und zieht beym Herabsinken die andere aufwärts; man sucht für eine gegebene Zeit t ihre Geschwindigkeit v, und den von ihr zurückgelegten Raum $AM = x$.

Aufl. 1) Die Richtungen, nach denen die beyden Massen fortrücken, sind also AM und NB, und die auf sie wirkenden Kräfte, ihre Gewichte M und N. Wenn man nun zu diesen noch die virtuellen Kräfte $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ und $Q = \frac{Ndu}{2gdt}$ nach den entgegengesetzten Richtungen MA und BN hinzufügt, so erhält man die Kräfte $M - P$ und $N + Q$, die einander an den beyden Rollen das Gleichgewicht halten müssen.

2) Heißt demnach e der Halbmesser des gemeinschaftlichen Zapfens beyder Rollen, so wird mit Rücksicht auf die Friktion (Statik §. 327.)

$$(M - P)(a - \lambda e) = (N + Q)(b + \lambda e),$$

oder, wenn man statt P und Q ihre Werthe setzt:

$$\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)(a - \lambda e) M = \left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)(b + \lambda e) N.$$

3) Es sey der Winkel, um den sich beyde Rollen im nächsten Zeittheile dt gemeinschaftlich drehen, $= d\varphi$, so wickelt sich von der größern das Seilstück $= a d\varphi$ ab, und auf die kleinere das Stück $= b d\varphi$ auf. Man hat also $v dt = a d\varphi$, $u dt = b d\varphi$, folglich $u = \frac{bv}{a}$, und $du = \frac{bdv}{a}$.

4) Dies für du in voriger Gleichung substituirt, giebt:

$$\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)(a - \lambda e) M = \left(1 + \frac{bdv}{2agdt}\right)$$

$(b + \lambda e) N$, woraus

$$dv = 2gdt \left[\frac{(a-\lambda e)aM - (b+\lambda e)aN}{(a-\lambda e)aM + (b+\lambda e)aN} \right] \text{ wird.}$$

5) Man setze den eingeschlossenen Koeffizienten $= f$, oder $dv = 2gfdt$, so erhält man durch Integration dieser Gleichung, $c = 2gft$, und $x = v\int dt = gft^2$.

§. 117.

Die Kräfte, womit die Seile AM und BN von den Massen M und N während der Bewegung gespannt werden, lassen sich folgendermaßen bestimmen:

1. Es sey die Spannung des Seiles $AM = Y$, so wirkt auf die Masse M außer ihrem Gewichte M noch die Kraft Y nach entgegengesetzter Richtung MA. Da nun beyde Kräfte die Bewegung dieser Masse allein hervorbringen, so muß ihnen die Kraft $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ nach der Richtung AM äquipollent seyn. Diesem zufolge wird:

$$M - Y = \frac{Mdv}{2gdt} = Mf, \text{ und folglich}$$

$$Y = (1 - f) M = \frac{(a+b)(b+\lambda e) MN}{(a-\lambda e) aM + (b+\lambda e) bN}$$

2) Man setze ferner die Spannung des Seiles $BN = Z$, so wirken auf die Masse N allein die Kräfte Z und N nach den Richtungen NB und BN, denen also die Kraft $Q = \frac{Ndu}{2gdt}$ nach NB äquipollent seyn muß. Man erhält daher:

$$Z - N = \frac{Ndu}{2gdt} = \frac{Nbf}{a}, \text{ mithin}$$

$$Z = \left(1 + \frac{bf}{a}\right) N = \frac{(a + b)(a - \lambda e) MN}{(a - \lambda e) aM + (b + \lambda e) bN}.$$

3) Die Spannungen der beyden Seile sind also während der ganzen Bewegung unveränderlich, und verhalten sich zu einander, wie $(b + \lambda e) : (a - \lambda e)$.

§. 118.

Ist die Masse N gegeben, so kann man fragen, welches die kleinste Masse M sey, wodurch jene in der kürzesten Zeit zu einer bestimmten Höhe h hinaufgezogen wird. Es soll also Mt ein Minimum, oder $d(Mt) = o$ seyn, und außerdem hat man noch $gft^2 = h$, folglich auch $d(gft^2) = o$. Hieraus entspringen die Gleichungen

$$Mdt + tdM = o, \text{ und}$$
$$2fdt + tdf = o,$$

die zusammen verbunden, die dritte Gleichung:

$$2fdM = Mdf \text{ geben.}$$

Man setze $f = \frac{p}{q}$, so wird $dp = dq = (a - \lambda e)$ adM, folglich $df = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{q^2} = \left(\frac{q - p}{q^2}\right)(a - \lambda e)$ adM, und daher:

$$2pq = (q - p)(a - \lambda e) aM.$$

Substituirt man nun für p und q ihre Werthe, so erhält man endlich folgende Gleichung:

$$M^2-\left(\tfrac{3}{2}-\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{b+\lambda e}{a-\lambda e}\right)MN=\frac{b}{a}\left(\frac{b+\lambda e}{a-\lambda e}\right)^2.N^2,$$

aus der sich das gesuchte M leicht bestimmen läßt.

§. 119.

Sieht man dagegen M als gegeben an, so läßt sich auf gleiche Art bestimmen, welches die größte Last N sey, die von M in der kürzesten Zeit zur Höhe h gehoben wird.

Hier ist nemlich $\frac{N}{t}$ ein Maximum, und man hat also außer der erstern Gleichung $2fdt + tdf = o$ noch die zweyte:

$$tdN - Ndt = o,$$

die beyde in Verbindung

$$2fdN + Ndf = o \text{ geben.}$$

Setzt man nun wieder $f = \frac{p}{q}$, so wird $dp = -(b + \lambda e)\, adN$, und $dq = (b + \lambda e)\, bdN$, also $df = -\left(\frac{aq + bp}{q^2}\right)(b + \lambda c)\, N$, wodurch sich die vorige Gleichung in folgende verwandelt:

$$2pq = (b + \lambda e)(aq + bp)N$$

Was rechter Hand steht, wird nach verrichteter Substitution $= (a - \lambda e)(b + \lambda e)(a^2 + ab)MN$, welches mit $(a - \lambda e)(q - p)\, aM$ einerley ist. Daher bekommt man hier eben die Gleichung zwischen M und N, als im vorigen §., und beyde Forderungen sind folglich gleichbedeutend.

§. 120.

1. Wenn nur eine Rolle vorhanden ist, so wird b $= a$ also $f = \frac{M(a - \lambda e) - N(a + \lambda e)}{M(a - \lambda e) + N(a + \lambda e)}$, und die Spannung des Seiles $= \frac{2MN(a + \lambda e)}{(a - \lambda e)M + (a + \lambda e)N}$

2. Ferner erhält man für das vortheilhafteste Verhältniß zwischen M und N die Gleichung:

$$M^2 - \left(\frac{a + \lambda e}{a - \lambda e}\right) MN = \left(\frac{a + \lambda e}{a - \lambda e}\right) N^2$$

woraus $M = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)\left(\frac{a + \lambda e}{a - \lambda e}\right) N$, oder:

$$M : N = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right) : \left(1 - \frac{2\lambda e}{a + \lambda e}\right) \text{ wird.}$$

3. Nach De la Hire *) ist die Kraft, die der Mensch anzuwenden vermag, um seinen Körper mit den Armen in die Höhe zu heben, um 20 ℔ größer, als sein Gewicht, das man im Durchschnitte zu 140 ℔ annehmen kann. Wir wollen beydes, Kraft und Gewicht des Menschen, gleich setzen, so wird die vortheilhafteste Last, die er vermittelst einer Rolle aufzuwinden im Stande ist, $= 140 \text{ ℔} \times \left(\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{a - \lambda e}{a + \lambda e}\right)$ $= 85\frac{1}{2} \text{ ℔} \left(1 - \frac{2\lambda e}{a + \lambda e}\right)$.

Der Mensch sinkt nemlich bey jedem Zuge, den er mit dem einen Arme verrichtet, durch einen kleinen

*) Memoires de l'acad. de Paris 1699 pag. 154.

Raum (der vorhin h genannt wurde) mit beschleunigter Bewegung herab, und überläßt sodann die Last so lange ihrer eigenen Bewegung, bis er sich mit dem andern Arme zu einem zweyten Zuge erhoben hat. Also gehört diese Bewegung zu denen, die zwar im Ganzen genommen gleichförmig zu seyn scheinen, aber eigentlich in kleinen Zeitabtheilungen beschleunigt sind, und nur durch nahe auf einander folgende Ruhepunkte immer von neuem wieder unterbrochen werden. Das Fortrücken der Last nach vollendetem Zuge, bevor der folgende Zug beginnt, ist hier wegen seiner kurzen Dauer außer Acht gelassen; indeß läßt sich auch diese Bewegung, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, zugleich mit in Rechnung bringen.

§. 121.

Aufgabe. Es werde die Masse N von der Masse M vermittelst eines Flaschenzuges, der in jeder Flasche n Rollen enthält, aufwärts gezogen; man fragt, zu welcher Höhe sie in einer gegebenen Zeit t steigen müsse.

Aufl. 1) Da M herabsinkt, und N in die Höhe steigt, so sind wieder die Kräfte $M - P$ und $N + Q$ mit einander im Gleichgewichte; man hat also die Gleichung:

$$2n(M - P) = N + Q, \text{ oder}$$

$$2nM\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right) = N\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$$

2) Wenn nun die Masse N durch den Raum $dx = udt$ hinaufrückt, so wird jedes Seilstück zwischen

einer obern und der dazu gehörigen untern Rolle um eben so viel kürzer, folglich beträgt die Verkürzung des ganzen Seiles, das zwischen den Rollen sich befindet, $2ndx = 2nudt$. Durch diesen Raum muß also zu gleicher Zeit die Masse M herabsinken, und man bekommt daher $vdt = 2nudt$, $v = 2nu$, und $dv = 2ndu$.

3) Dies für dv in voriger Gleichung substituirt, giebt:

$$2nM\left(1 - \frac{2ndu}{2gdt}\right) = N\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$$

woraus: $du = 2gdt\left(\frac{2nM - N}{4n^2M + N}\right)$, und

$$x = \frac{gt^2(2nM - N)}{4n^2M + N} \text{ wird.}$$

§. 122.

Auch hier läßt sich, wenn M gegeben ist, die Masse N so bestimmen, daß sie zur Zeit t, worin sie durch einen gegebenen Raum herabsinkt, das möglichst größte Verhältniß hat; setzt man nemlich wieder $\frac{2nM - N}{4n^2M + N} = f$, so wird, wie vorhin:

$$2fdN + Ndf = 0,$$

und, wenn man noch Zähler und Nenner von f durch p und q bezeichnet: $df = \frac{dp}{q} - \frac{pdp}{q^2} = -\frac{(p+q)\,dN}{q^2}$, also:

$$2pq = (p+q)\,N, \text{ oder}$$

$$8n^3M^2 = N^2 + (6n^2 - n)\, MN$$

welches $N = -(3n^2 - \frac{1}{2}n)\, M + M\sqrt{(9n^4 + 5n^3 + \frac{1}{4}n^2)}$ giebt.

So wird also z. B. für $n = 3$, $= 3{,}932\, M$.

§. 123.

Man sieht leicht, daß das bisherige Verfahren, aus dem Gleichgewichte der virtuellen Kräfte mit den gegebenen die Gesetze der durch sie hervorgebrachten Bewegungen herzuleiten, auch bey einer Verbindung mehrerer Massen, und selbst in Fällen, wo ihre Bewegung krummlinigt ist, in Anwendung gebracht werden könne. Bewegt sich nemlich eine dieser Massen M in einer Kurve, so kann man jederzeit zwey oder drey auf einander senkrecht gerichtete Kräfte angeben, die auf den Schwerpunkt derselben angebracht, sie nach eben dem Gesetze durch eben die Kurve zu leiten vermögend sind. So wird z. B., wenn ihre Bahn in einer Ebene liegt, ihr Ort für eine gegebene Zeit t durch zwey rechtwinklichte Koordinaten x und y bestimmt, und man hat für deren augenblickliche Aenderungen die Gleichungen $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M}$, aus denen gegenseitig die Kräfte $P = \frac{Md^2x}{2gdt^2}$ und $Q = \frac{Md^2y}{2gdt^2}$ entspringen, die als unmittelbar wirkende Ursachen dieser krummlinigten Bewegung zu betrachten sind. Sucht man nun auf gleiche Weise die virtuellen Kräfte auch aus den Bewegungen der übrigen Massen, so müssen diese insgesammt den gegebenen Kräften äquipollent seyn, und folglich nach entgegengesetzten Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Es wäre überflüßig, diese Methode noch durch andere hieher gehörige Beyspiele zu erläutern, da die in den folgenden Kapiteln abzuhandelnden Materien uns Gelegenheit genug zu ihrer Anwendung darbieten werden.

Beharrungszustand der Bewegung.

§. 124.

Es giebt beschleunigte Bewegungen, bey denen die Geschwindigkeit Anfangs $= 0$ ist, und sich darauf durch stete Zunahme nach und nach einer bestimmten Grenze ins Unendliche nähert. Diese Grenze erreicht sie zwar, im strengsten Verstande genommen, nie; sie kann ihr aber doch binnen einer gewissen Zeit schon so nahe gekommen seyn, daß man auf den noch fehlenden Unterschied keine Rücksicht zu nehmen braucht. Bey den meisten Bewegungen solcher Art geschieht dies sehr bald, und die Geschwindigkeit ändert sich folglich alsdann die ganze übrige Zeit hindurch, so lange auch die Bewegung dauern mag, nur noch unmerklich, so daß man berechtigt ist, sie mit ihrer Grenze zu verwechseln, oder die Bewegung selbst als vollkommen gleichförmig anzusehen. Man sagt in diesem Falle von ihr, sie sey in den **Beharrungszustand** gekommen.

Ein Beyspiel dieser Art giebt (§. 88.) das Herabfallen eines Körpers durch die Luft; setzt man nemlich das Gewicht, das ihm in der Luft übrig bleibt, $= G$, so wird die Grenze seiner zunehmenden Geschwindigkeit $= \sqrt{\frac{G}{L}}$, und es hängt allein von der Größe des Widerstandes ab, wie bald sie dieser Grenze nahe genug kommen wird, um die Bewegung als gleichförmig annehmen zu können. Bey der Glaskugel (§. 94.) wäre z. B. $M = 0{,}0694407$, $G = 0{,}066406$, $L = 0{,}0006234 \pi a^2 = 0{,}000083461$, $\varkappa = \sqrt{\frac{G}{L}} = 28{,}207$ Fuß, und $\omega = \frac{2g\sqrt{GL}}{M} = 1{,}059452$; folglich ihre Geschwindigkeit nach Verlauf einer Zeit von 5 Sekunden $= \varkappa\left(\frac{e^{10\omega} - 1}{e^{10\omega} + 1}\right) = 28{,}206$ Fuß. Ihr Fallen ließe sich also von dieser Zeit an schon vollkommen als gleichförmig ansehen, da die Geschwindigkeit in der ganzen folgenden Zeit höchstens nur noch um $\frac{1}{1000}$ Fuß wachsen könnte.

§. 125.

Im Beharrungszustande ist die bewegende Kraft mit dem gesammten Widerstande, der ihr entgegenwirkt, im Gleichgewichte.

Es sey die in Bewegung gesetzte Masse $= M$, ihre Geschwindigkeit in einem Augenblicke, wo sie noch im Wachsen ist, $= v$, die auf sie wirkende Kraft $= V$, der Widerstand $= R$; so müssen die drey Kräfte V, R und $\frac{Mdv}{2gdt}$, wenn letztere nach einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung auf den Schwerpunkt der Masse angebracht wird, einander das Gleichgewicht halten.

Ist nun die Bewegung bereits in den Beharrungszustand gekommen, so leidet die Geschwindigkeit v keine weitern Aenderungen mehr, oder es ist $dv = o$, also auch die Kraft $\frac{Mdv}{2gdt} = o$; folglich sind alsdann noch die Kräfte V und R für sich allein mit einander im Gleichgewichte.

§. 126.

Gegenseitig folgt, daß wenn Kraft und Widerstand sich mit einander ins Gleichgewicht setzen, die Bewegung der Masse, die von der Kraft getrieben wird, in den Beharrungszustand komme. Man setze nemlich, wie vorhin, ihre Geschwindigkeit $= v$, so sind die drey Kräfte V, R und $\frac{Mdv}{2gdt}$ unter sich im Gleichgewichte. Wenn nun von diesen die erstern beyden Kräfte für sich einander das Gleichgewicht halten, so kann es zwischen allen dreyen nicht mehr bestehen, wofern nicht $\frac{Mdv}{2gdt}$ verschwindet; also muß in diesem Falle $dv = o$, und folglich v eine unveränderliche Größe seyn.

§. 127.

In manchen Fällen, zumal wenn die anfängliche

Beschleunigung nur einen geringen Theil der ganzen Bewegung ausmacht, kann man sich begnügen, bloß mit dem Beharrungszustande der Bewegung bekannt zu seyn, ohne daß man den allmähligen Uebergang zu diesem von der Ruhe an in Betracht zu ziehen nöthig hat. Hierdurch wird die Auflösung vieler mechanischen Probleme sehr erleichtert; ja oft ist dies das einzige Mittel, zu einem brauchbaren Resultate zu gelangen, wenn das Gesetz der Bewegung im Allgemeinen zu verwickelt, und seine Bestimmung mit zu großen Schwierigkeiten verbunden ist.

So ließe sich z. B. die Geschwindigkeit des fallenden Körpers nach vollendetem Wachsthum ohne Rücksicht auf die vorhergehende anfängliche Beschleunigung auf folgende Art finden. Sie sey $= c$, so ist der Widerstand $= Lc^2$, folglich, da dieser mit der bewegenden Kraft G im Gleichgewichte seyn muß: $G = Lc^2$, mithin $c = \sqrt{\frac{G}{L}}$.

Sechstes Kapitel.

Von den Kräften der Menschen und Thiere bey Bewegungen.

---

§. 128.

Es sey das Gewicht eines Menschen von mittlerer Statur und Stärke $= G$; die größte Last, womit er beläden werden kann, ohne zu sinken, $= K$; so ist seine ganze Körperkraft mit der Last $G + K$ im Gleichgewichte, oder die Summe aller Kräfte, die er nach vertikaler Richtung anzuwenden vermag, ist einer einzigen Kraft $G + K$, deren Richtung durch seinen Schwerpunkt geht, äquipollent.

§. 129.

Diese Kraft behält er, wie die Erfahrung lehrt, auch dann, wenn seine Kniee gebogen sind. Er hat also das Vermögen, mit einer Last P, die kleiner als K ist, aus einer solchen gebogenen Stellung sich in die Höhe zu richten, und seine Kniee zu strecken. Dies geschieht nemlich, indem er die Füße gegen den Boden, der ihm zur Unterstützung dient, mit seiner ganzen Kraft $G + K$ gegendrückt, und so seinen Körper sowohl, als die ihm aufgelegte Last hinaufhebt.

Man setze die Geschwindigkeit, die beyde dadurch nach einer gewissen Zeit t erhalten, $= u$, so sind, der Widerstand $G + P$, und die virtuelle Kraft $\frac{(G+P)\,du}{2gdt}$ zusammen genommen, mit der bewegenden Kraft $G + K$ im Gleichgewichte; also hat man

$$G + P + \frac{(G+P)\,du}{2gdt} = G + K,$$

$$\text{oder } du = 2gdt\left(\frac{K - P}{G + P}\right),$$

$$\text{folglich } u = 2gt\left(\frac{K - P}{G + P}\right),$$

und die Höhe x, zu der sein Schwerpunkt während der Zeit t vertikal aufwärts getrieben wird $= \frac{gt^2(K-P)}{G+P}$.

Diese Bewegung dauert aber nur so lange, als seine Füße den Boden berühren; so bald dies nicht mehr geschieht, hört die Beschleunigung auf, und sein Schwerpunkt erhebt sich dann noch mit der zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit zu einer Höhe, die dieser Geschwindigkeit als Fallhöhe zugehört.

§. 130.

Nach **de la Hire** kann ein knieender Mensch mit einer fremden Last von 150 ℔ 2 bis 3 Zoll in einer Sekunde sich in die Höhe heben. Wenn man nun sein eigenes Gewicht G zu 140 ℔ annimmt, so erhält man nach der vorhergehenden Formel $15\frac{5}{8}$ *) $(K - 150)$ $= \frac{1}{4} \times 290$, also

$$K = 155 \text{ ℔ beynahe.}$$

Dies Gewicht läßt sich aber nur, wie begreiflich ist, als ein mittleres Maaß menschlicher Kraft annehmen. Bey sehr starken Leuten kann es wohl über 200 ℔ betragen, und man wird es dagegen, wenn von anhaltender Anstrengung der Kraft die Rede ist, viel kleiner als 150 ℔ annehmen müssen. **Euler** *) setzt in diesem Betracht $K = 60$ ℔.

Vom Gange belasteter Menschen.

§. 131.

Aufgabe. Es sey, wie vorhin, K die größte

*) Mem. de l'acad. de Berlin 1772 pag. 161.

Last, die ein Mensch im Gleichgewichte zu halten vermag, wenn er still steht; c die Geschwindigkeit seines schnellsten Ganges, wenn er mit keinem fremden Gewichte beladen ist; man sucht die Geschwindigkeit v, womit er eine gegebene Last P, die kleiner als K ist, auf horizontalem Boden forttragen kann.

Fig. 15. Aufl 1) Man setze die Länge seines Beines CB $=$ a, die Weite seines natürlichen Schrittes AB $=$ 2b. Wenn er mit dem vordern Fuße B bis zu dieser Weite ausgetreten ist, so liegt sein Schwerpunkt C am tiefsten. Er erhebt ihn nach und nach, indem er sich um den Unterstützungspunkt B dreht, durch einen Bogen, der CB zum Halbmesser hat, und läßt während dieser Zeit das hintere Bein so lange vorwärts rücken, bis beyde in der durch B gehenden Vertikale BG zusammen kommen.

2) In dieser Stellung hat sein Schwerpunkt die größte Höhe erreicht. Er läßt ihn hierauf durch die andere Hälfte des Bogens wieder herabsinken, während er das andere Bein zu einem zweyten Schritte Ba ausstreckt, und wenn er endlich den Fuß in a niedersetzt, kommt der Schwerpunkt c wieder in dieselbe Lage, die er in C hatte, oder hat eben die Höhe über dem Boden, als zu Anfange.

3) Zugleich ist derselbe dann um die Weite Cc $=$ AB $=$ 2b nach horizontaler Richtung fortgerückt. Nennt man also die Zeit, die zwischen zweyen Fußtritten B und a, oder während eines Schrittes verfließt, $=$ T, so wird $Tv = 2b$, folglich $v = \frac{2b}{T}$.

4) Wenn nun diese Bewegung einmal eingeleitet ist, so hat der Mensch weiter keine Kraft anzuwenden nöthig, um sie zu unterhalten, als daß er nach jedesmaligem Austreten den Schwerpunkt von seiner niedrigsten Stelle C bis zur höchsten G, also durch den vertikalen Raum DG, erheben muß. Man setze diesen Raum $= h$, so hat man: $h = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

5) Es sey ferner für eine unbestimmte Zeit t die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $= u$, der Raum, durch den er während dieser Zeit gestiegen ist, $= x$, so wird, wenn man (§. 129.) $\frac{K - P}{G + P} = p$ setzt, $u = 2gpt$, und $x = gpt^2$.

6) Diese Beschleunigung dauert aber nur so lange, bis der Schwerpunkt eine Geschwindigkeit u bekommen hat, womit er, sich selbst überlassen, zu einer Höhe gelangt, die den bereits zurückgelegten Raum x zur ganzen Höhe h, die er erreichen muß, ergänzt. Da er nun mit der Geschwindigkeit u noch bis zur Höhe $\frac{u^2}{4g}$ (§. 41. 4.) steigt, so hat man:

$$x + \frac{u^2}{4g} = h,$$

oder, wenn man für x und u ihre Werthe (5) substituirt,

$$gpt^2 + gp^2t^2 = h,$$

woraus die Dauer der Beschleunigung $t = \sqrt{\frac{h}{gp(1 + p)}}$ wird.

7) Diesen Werth von t in u gesetzt, giebt für die Geschwindigkeit, wobey die Beschleunigung aufhört: $u = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$. Nennt man also die Zeit des übrigen Steigens $= t'$, so ist $2gt' = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$, und $t' = \sqrt{\frac{hp}{g(1+p)}} = pt$.

8) Also die Zeit, worin der Schwerpunkt von C bis G gelangt, $= t + t' = (1+p)\,t = \sqrt{\frac{h(1+p)}{gp}}$. Hierzu noch die Zeit addirt, die er zubringt, um von G bis c herabzusinken, giebt die Zeit T des ganzen Schrittes.

9) Diese letztere Zeit ist aber genau der vorhergehenden gleich: denn, wenn der Schwerpunkt die Zeit t' hindurch gefallen ist, und dadurch die Geschwindigkeit $2gt' = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$ erlangt hat, die er vorhin zu Ende der Zeit t hatte (7), so muß der Mensch nun wieder seine ganze Kraft $G + K$ anwenden, um diese Geschwindigkeit nach und nach zu vernichten, damit sie im Punkte $c = 0$ sey. Setzt man also die Zeit dieser Verzögerung $= t''$, so muß

$$2gt' - 2gpt'' = 0, \text{ folglich}$$

$$t'' = \frac{t'}{p} = t \text{ seyn.}$$

10) Demnach ist $T = 2\sqrt{\frac{h(1+p)}{gp}} = 2\sqrt{}$

$\frac{h(G+K)}{g(K-P)}$, und daher $v = \frac{2b}{T} = b\sqrt{\frac{g(K-P)}{h(G+K)}}$,
oder $v^2 = \frac{b^2 g(K-P)}{h(G+K)}$.

11) Hierin $P = 0$ gesetzt, giebt $c^2 = \frac{b^2 gK}{h(G+K)}$;
also wird: $\frac{v^2}{c^2} = \frac{K-P}{K}$, und $v = c\sqrt{(1 - \frac{P}{K})}$.

§. 132.

Die Kraft K muß hier offenbar viel kleiner angenommen werden, als sie im §. 130. gefunden ist, weil sie beym Gange abwechselnd nur durch die Muskeln des einen Beines ausgeübt werden kann, auf dem jedesmal die ganze Last ruhet. Setzen wir mit **Lambert** die Länge des Beines $a = 2\frac{1}{2}$ Rheinl. Fuß, die Weite des natürlichen Schrittes $2b = 2$ Fuß, und die Geschwindigkeit des schnellsten Ganges $c = 5\frac{1}{2}$ Fuß *), so wird
$h = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = 0{,}2$ Fuß beynahe. Diese Werthe für c, b und h in die für a erhaltene Formel substituirt, geben

$$6(G+K) = 15\tfrac{5}{8}K,$$

woraus man $K = \frac{48}{77} G = 87$ ℔ erhält.

*) Größer darf man diese Geschwindigkeit, da hier vom bloßen Gange die Rede ist, nicht wohl annehmen. Beym Laufen kann sie allerdings die angegebene Grenze übersteigen: wovon aber der Grund in einer zweckmäßigen Beugung der Kniee liegt, die diese Bewegung vom eigentlichen Gange wesentlich unterscheidet, und die den Vortheil gewährt, daß dadurch die Höhe h, zu der der Schwerpunkt bey jedem Schritte gehoben werden muß, um ein Merkliches vermindert wird.

§. 133.

Aus der Formel $v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}$ erhält man gegenseitig

$$P = K\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \ldots$$

wodurch die Last bestimmt wird, die ein Mensch tragen kann, wenn er dabey zugleich mit einer gegebenen Geschwindigkeit v fortschreitet.

Anmerk. Diese Formel würde zuerst von Herrn Euler in die Maschinenlehre eingeführt *). Nachmals verwarf er sie zwar wieder, und setzte statt ihrer: $P = K\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2$, allein bloß aus dem Grunde, weil letztere mit einer bekannten hydrodynamischen Formel übereinkommt, die die Wirkung des Stoßes flüßiger Materien angiebt **). Bouguer bedient sich in s. Manoeuvre des Vaisseaux Liv. I. Sect. 2. pag. 141. der einfachern Formel $P = K\left(1 - \frac{v}{c}\right)$, die aber meines Wissens von Niemanden nachher weiter gebraucht ist.

§. 134.

Wir haben bisher angenommen, der Mensch verwende auf die Bewegung seine ganze Kraft $G + K$, die er nach vertikaler Richtung auszuüben im Stande ist; man sieht aber leicht, daß eine solche Anstrengung ihn in kurzer Zeit ermüden, und zu fernerer Arbeit untauglich machen würde. Daher bleibt noch zu unter-

*) S. Mem. de l'acad. de Berlin 1747 und Nov. Comment. Petrop. Tom. III.

**) Mem. de l'acad. de Berlin 1752 und Nov. Comment. Petrop. Tom. VIII.

suchen übrig, in wiefern die vorhin gefundene Formel abgeändert werden müsse, wenn man zugleich auf eine anhaltende Dauer der Bewegung Rücksicht nehmen will.

Man setze, der Mensch gebrauche während der ganzen Bewegung nur einen Theil seiner völligen Kraft $=$ $G + W$, so daß $W < K$ angenommen wird, so bleibt ihm zu Anfange noch die Kraft $K - W$ zum allmähligen Ersatze dessen, was nach und nach verloren geht, übrig. Die fortgesetzte Anwendung der Kraft $G + W$ raubt ihm nun von diesem Ueberreste $K - W$ von Zeit zu Zeit immer mehr und mehr, und zwar ist es sehr natürlich, anzunehmen, daß der Verlust in einerley Zeit der Kraft $G + W$ selbst proportional sey; wir können ihn also für jedes Zeitmoment $dt = \frac{1}{n} . (G + W)\,dt$ setzen.

Nach Verlauf einer Zeit t beträgt demnach dieser Verlust $\frac{1}{n} . (G + W)\,t$, und wenn T die Zeit heißt, worin die ganze Kraft $K = W$ erschöpft wird, so hat man:

$$\frac{1}{n}(G + W)\,T = K - W, \text{ folglich:}$$

$$T = \frac{n\,(K - W)}{G + W}.$$

Nach dieser Zeit kann also die Kraft $G + W$ nicht mehr ergänzt, folglich auch nicht ferner mehr in Ausübung gebracht werden.

§. 135.

Hieraus läßt sich zuvörderst herleiten, welches die vortheilhafteste Last W sey, die der Mensch im ruhenden Zustande zu tragen, oder im Gleichgewichte zu halten vermögend ist. In diesem Betracht muß nemlich das Produkt WT aus der Last W in die mögliche Dauer der Anstrengung T ein Maximum seyn; gebraucht man nun für T den eben gefundenen Werth, so erhält man:

$$d . n \left(\frac{KW - W^2}{G + W}\right) = 0, \text{ oder:}$$

$$(K - 2W)(G + W) - KW + W^2 = 0,$$

woraus für W die Gleichung:

$$W^2 + 2GW - KG = 0 \text{ entspringt.}$$

Aus dieser wird $W = \sqrt{(KG + G^2)} - G$, und wenn man K = 150 ℔, G = 140 ℔ setzt, $W = 61\frac{1}{2}$ ℔, wofür wir mit **Euler** 60 ℔ annehmen wollen.

§. 136.

Wir wollen jetzt eben diese Betrachtung auch auf den Fall anwenden, wo eine Last P gegeben ist, und die Geschwindigkeit v bestimmt werden soll, womit der Mensch diese Last forttragen kann. Es sey G + W die vortheilhafteste Kraft, die er dazu fortdauernd anwenden darf, so wird, wenn man in der für v (§. 131. 10.) gefundenen Formel W statt K, und der Kürze wegen den beständigen Faktor $\frac{b^2 g}{h} = f^2$ setzt, $v^2 = f^2$.

$\left(\frac{W-P}{G+W}\right)$, und da hier Tv ein Maximum seyn muß:

§. 134.

$d(Tv) = o$, oder, welches einerley ist:

$$d(T^2v^2) = d\left(f^2n^2 \frac{(K-W)^2 \cdot (W-P)}{(G+W)^3}\right) = o.$$

Nach angestellter Differenziation erhält man nun:

$$(G+W)\left[(K-W)^2 - 2(W-P)(K-W)\right]$$
$$= 3(K-W)^2(W-P)$$

oder $(G+W)(K+2P-3W) = 3(K-W)$
$(W-P)$

$$\text{woraus } W = \frac{KG + 2GP + 3KP}{3G + 2K + P} \text{ wird.}$$

Dies für W in v^2 substituirt, giebt ferner:

$$\frac{v^2}{f^2} = \frac{KG + KP - GP - P^2}{3G^2 + 3GP + 3KG + 3KP} = \frac{(G+P)(K-P)}{3(G+P)(G+K)},$$

$$\text{also } v^2 = \tfrac{1}{3}f^2\left(\frac{K-P}{G+K}\right).$$

§. 137.

Man nenne $\varkappa$ die vortheilhafteste Geschwindigkeit, womit ein Mensch gehen muß, dem gar keine Last weiter aufgelegt ist, so wird für $P = o$, $v = \varkappa$, also

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{3}f^2 \cdot \frac{K}{G+K} = \tfrac{1}{3}c^2 \text{ (§. 131. II.)}$$

Nimmt man nun, wie oben (§. 132.), $c = 5\frac{1}{2}$ Fuß an, so bekommt man $\varkappa = \frac{11\sqrt{3}}{6} = 3{,}175$ Fuß. Mit dieser Geschwindigkeit würde er eine deutsche Meile, die nach den genauesten Rechnungen 3805 Toisen, oder 23630 Rheinl. Fuß enthält, in einer Zeit von 7442 Sec. oder 2 Stunden 4 Min. zurücklegen, die man auch für den gewöhnlichen Schritt der Fußgänger auf die Meile festzusetzen pflegt.

§. 138.

Wenn man die letztere Gleichung in die vorhergehende dividirt, so erhält man:

$$\frac{v^2}{\varkappa^2} = 1 - \frac{P}{K}, \text{ oder}$$

$$v = \varkappa\sqrt{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

eine Gleichung, die mit der zuerst gefundenen (§. 131.) in der Form einerley ist.

Um hieraus endlich noch die Last und Geschwindigkeit zu bestimmen, bey denen das Produkt Pv ein Maximum wird, setze man $d.\,Pv = d\left(v - \frac{v^3}{\varkappa^2}\right) = 0$.

Dadurch wird $3v^2 = \varkappa^2$, oder $v = \varkappa\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $P = \frac{2}{3}K$.

Wir wollen $K = 60$ ℔, und $\varkappa = 3\frac{1}{2}$ Fuß annehmen, so ist die vortheilhafteste Last für den Menschen $= 40$ ℔, und diese trägt er mit 2 Fuß Geschwindigkeit.

Anmerk. Herrn Coulombs Abhandlung über die Kräfte des Menschen in den Mem. de l'inst. nat. an VII. pag. 380. ist besonders wegen der darin mitgetheilten Beobachtungen schätzungswerth, wiewohl diese sich größtentheils nur auf Leute von vorzüglicher Stärke beziehen, und also in sofern nicht geradezu für die Ausübung brauchbar sind.

Nach dem Berichte der stärksten Lastträger können diese den Tag über eine Last von 44 Kilogram oder 90,86 Pfund auf eine Weite von höchstens 20 Kilometern forttragen. Da nun das Kilometer 3079,458 paris. oder 3187,936 rheinl. Fuß enthält, so giebt dies, den Arbeitstag zu 10 Stunden gerechnet, eine Geschwindigkeit $v = 1,77107$ Fuß in 1 Sec.

Um hiernach die Werthe von c und K zu bestimmen, hat man zuvörderst

$$v^2 = \frac{1}{3} c^2 \left(1 - \frac{P}{K}\right), \text{ und}$$

$$c^2 = \frac{b^2 gK}{h\,(G+K)} \text{ (§. 131. 11.), oder } K = \frac{c^2 hG}{b^2 g - c^2 h};$$ daher wird ferner:

$$3v^2 = c^2 \left(1 + \frac{P}{G}\right) - \frac{b^2 gP}{hG}, \text{ und folglich}$$

$$c^2 = \left(3v^2 + \frac{b^2 gP}{hG}\right) : \left(1 + \frac{P}{G}\right).$$

Setzt man nun, wie oben (§. 132.), $b = 1$ Fuß. $h = 0,4$ Fuß, $G = 140$ Pfund, und nach der gegenwärtigen Angabe $P = 90,86$ Pfund, $v = 1,771$ Fuß, so erhält man $c^2 = 37,052'$, $c = 6,0875'$, und $\varkappa = c\sqrt{\frac{1}{3}} = 3,5143'$; woraus sich $K = 126$ Pfund ergiebt.

Eine andere von ihm selbst gemachte Beobachtung ist folgende: Er ließ durch einige Arbeiter Meubeln aus seiner Wohnung zu einem andern, 2 Kilometer, oder 6376 Fuß davon entlegenen Hause hinübertragen. Die jedesmalige Last für jeden einzelnen Mann betrug 58 Kilogram = 119,77 Pfd., und damit konnten sie in einem Tage 6 Gänge machen; doch war diese Arbeit für sie so anstrengend, daß sie es nicht vermogten, sie den folgenden Tag fortzusetzen.

Nach der vorhin erhaltenen Geschwindigkeit eines unbelasteten Menschen $\varkappa = 3,5143'$ beträgt die Zeit, die sie auf die Rückwege verwenden mußten, etwa 3 Stunden; diese von 10 Stunden abgezogen, bleibt für die Zeit des eigentlichen Tragens 7 Stunden übrig, die in Sekunden verwandelt, und in das Sechsfache des obigen Weges dividirt, eine Geschwindigkeit $v = 1,518$ Fuß giebt. Substituirt man diesen Werth für v in die Formel $P = K\left(1 - \frac{v^2}{\varkappa^2}\right)$, und setzt außerdem nach voriger Rechnung $K = 126$ Pfund, $\varkappa = 3,5143'$, so bekommt man P = 103 Pfund, also nicht ganz so viel, als die wirkliche Last betrug, wie denn dies nach der angeführten Bemerkung auch nicht anders zu erwarten ist.

§. 139.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit v zu bestimmen, womit ein Mensch auf schrägem Boden eine gegebene Last P in die Höhe tragen kann.

Aufl. 1) Man setze den Neigungswinkel des Bodens = I, die Weite eines natürlichen Schrittes auf diesem = f, so ist die Höhe, zu der der Schwerpunkt bey jedem Schritte gehoben werden muß, $= h + f \operatorname{Sin} I$. Dies in §. 131. 8. statt h gesetzt, giebt die Zeit seines Steigens $= \sqrt{\frac{(1+p)(h + f \operatorname{Sin} I)}{pg}}$.

2) Die übrige Zeit, worin er durch den Raum h wieder vertikal herabsinkt, ist dagegen, wie dort, $= \sqrt{\frac{(1+p)h}{pg}}$.

3) Beydes addirt, giebt die Zeit des ganzen Schrittes $T = \sqrt{\frac{1+p}{pg}} \cdot [\sqrt{h} + \sqrt{(h + f \operatorname{Sin} I)}]$.

4) Also wird $v^2 = \frac{f^2}{T^2} = \frac{f^2 pg}{1+p} : [\sqrt{h} + \sqrt{(h + f \operatorname{Sin} I)}]^2 = \left(\frac{K-P}{G+K}\right) \cdot \frac{f^2 g}{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + f \operatorname{Sin} I)}]^2}$.

§. 140.

Die beyden Größen f und h lassen sich hier nicht so leicht und sicher angeben, als in dem vorhin betrach-

teten

teten besondern Falle, wo $I = o$ ist. Die Weite des Schrittes f ist unstreitig von dem Neigungswinkel abhängig, und wird, wie die Erfahrung lehrt, desto kleiner, je steiler der Boden ist; man kann also, da für $I = o$, $f = 2b$ ist, im Allgemeinen $f = 2b \operatorname{Cos} I^n$ setzen. Bey Treppen, die $30°$ Neigung haben, giebt man der Regel nach den Stufen 1 Fuß Breite im freyen Auftritte, d. h. es ist für diese Schiefe $f = b\sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}1547\, b$. Wir wollen für $I = 45°$, $f = b$ annehmen, so wird $(\operatorname{Cos} 45°)^n = \frac{1}{2}$, folglich $n = 2$, und daher $f = 2b \operatorname{Cos} I^2$.

Was die Größe h betrift, so ist diese schon an sich im Verhältnisse gegen f kleiner, als beym horizontalen Gange, und wird dadurch noch mehr vermindert, daß man das Knie, das beym Austreten nothwendig gebogen werden muß, nie ganz gerade streckt, auch wenn der Schwerpunkt seine größte Höhe erreicht hat. Sie mögte daher gegen die Höhe $f \operatorname{Sin} I$, zu der der Körper bey jedem Schritte wegen der Schiefe des Bodens gehoben wird, zumal wenn diese einigermaßen beträchtlich ist, wohl kaum in Anschlag zu bringen seyn.

§. 141.

Um den Neigunpswinkel zu finden, unter welchem eine gegebene Höhe in der kürzesten Zeit erstiegen werden kann, zerlege man die Geschwindigkeit v in eine horizontale $= v \operatorname{Cos} I$, und in eine vertikale $= v \operatorname{Sin} I$, so erhält man für leztere

$$v \operatorname{Sin} I = \sqrt{\left(\frac{K-P}{G+R}\right)} \cdot \frac{f \operatorname{Sin} I \sqrt{g}}{\sqrt{h} + \sqrt{(h + f \operatorname{Sin} I)}}.$$

Diese muß also für den gesuchten Winkel am größten ausfallen, oder es muß, wenn man $f \operatorname{Sin} I = z$ setzt, $\frac{z}{\sqrt{h} + \sqrt{(h+z)}}$ ein Maximum seyn. Daher hat man: $d . \frac{z}{\sqrt{h} + \sqrt{(h+z)}} = o$, und, wenn man für h einen mittlern Werth annimmt, und diesen als beständig ansieht:

$$[\sqrt{h} + \sqrt{(h+z)}]\, dz - \frac{\frac{1}{2} z dz}{\sqrt{(h+z)}} = o, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(h^2 + hz)}\, dz = -(h + \tfrac{1}{2} z)\, dz$$

also wird $\frac{1}{2} z dz = o$, folglich $dz = o$.

Nun ist $z = f \operatorname{Sin} I = 2b \operatorname{Cos} I^2 \operatorname{Sin} I$, oder, wenn man $\operatorname{Sin} I = u$ setzt, $z = 2b (u - u^3)$. Man bekommt also: $du - 3u^2 du = o$, und daraus $u = \operatorname{Sin} I = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $I = 35° 16'$. Gewöhnlich schätzt man diesen Winkel auf 30°, wobey aber dann zugleich auf eine längere Dauer der Bewegung Rücksicht genommen wird.

§. 142.

Zum Fortschieben einer Sache dient dem Menschen der Arm bloß als Werkzeug; die Kraft dazu verschafft ihm nur allein das Gewicht seines Körpers. Er bringt nemlich seinen Körper dabey in eine schräge Stellung Fig. 16. HCA, wodurch das Gewicht desselben G in eine Kraft nach der Horizontale Cf und in eine nach CA zerfällt.

Man nenne diese beyden Kräfte M und N, und den Winkel ACg, den die Lage des Körpers HCA mit der Vertikale Cg macht, $= \varphi$, so hat man die beyden Gleichungen (Stat. §. 49.)

$$N \operatorname{Sin} \varphi = M \operatorname{Sin} fCG = M, \text{ und}$$

$$G \operatorname{Sin} \varphi = M \operatorname{Sin} ACf = M \operatorname{Cos} \varphi.$$

Hieraus wird die Kraft $M = G \operatorname{tang} \varphi$, die zum Fortschieben des Widerstandes allein wirksam ist, und $N = G \operatorname{Sec} \varphi$, die gegen den Unterstützungspunkt A drückt, und dadurch aufgehoben wird.

Es sey ferner R der Widerstand, der dem ausgestreckten Arme HE nach der horizontalen Richtung EH entgegenwirkt, so ist zu dessen Ueberwindung im Schwerpunkte C die Kraft $\frac{R \cdot AH}{AC}$ erforderlich. Setzt man nun das Verhältniß AH : AC wie 5 : 3, so erhält man die Gleichung

$$G \operatorname{tang} \varphi = \tfrac{5}{3} R,$$

woraus der Winkel φ bestimmt wird, unter welchem der Mensch seinen Körper inkliniren muß, um den gegebenen Widerstand aus der Stelle zu schieben.

§. 143.

Wenn die Masse bereits ins Fortrücken gekommen ist, so hat der Mensch, um den gleichförmigen Gang der Bewegung zu unterhalten, bloß nöthig, ihr in eben der inklinirten Lage, wodurch er sie Anfangs zum Weichen brachte, beständig nachzufolgen. Dabey drückt auf ihn nach der schiefen Richtung CA eine Kraft =

$G \operatorname{Sec} \varphi$, die um $G (\operatorname{Sec} \varphi - 1)$ größer ist, als das bloße Gewicht seines Körpers. Es verhält sich daher diese Art des schrägen Ganges gerade so, als erstiege der Mensch mit einer fremden Last $= G (\operatorname{Sec} \varphi - 1)$ eine Anhöhe, die unter dem Winkel φ gegen die Horizontale geneigt ist; wovon man sich am deutlichsten überzeugen kann, wenn man sich die Richtung CA als vertikal denkt, und damit die Richtung der Kraft $G \operatorname{Sec} \varphi$, so wie die Lage des Bodens in Vergleichung bringt.

§. 144.

Will man also auf gegenwärtigen Fall die Formel (§. 139.) anwenden, so wird hier $P = G (\operatorname{Sec} \varphi - 1)$, $I = \varphi$, und da der Schwerpunkt C stets dieselbe Höhe über den Boden behalten muß, $h = 0$, folglich erhält man:

$$v^2 = \left(\frac{K + G - G \operatorname{Sec} \varphi}{K + G}\right) \cdot \frac{2gb \operatorname{Cos} \varphi^2}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

für die Geschwindigkeit, womit der Widerstand $R = \frac{3}{5} G$ tang φ sich fortschieben läßt.

Diese Geschwindigkeit wird offenbar desto geringer, je größer man den Winkel φ, folglich auch den Widerstand R annimmt, oder: was auf der einen Seite der Mensch durch stärkere Inklinirung seines Körpers an Kraft zum Fortschieben gewinnt, das geht ihm auf der andern Seite an Geschwindigkeit verloren. Es giebt also irgend eine Lage für ihn, wobey er von seinem Gewichte den zweckmäßigsten Gebrauch macht, d. h. wofür das Produkt vR ein Maximum ist; diese Voraussetzung giebt $dv^2R^2 = 0$, oder mit Weglassung der beständigen Faktoren: $d\left((K+G)\sin\varphi - G\tan\varphi\right) = 0$; wodurch

$$(K+G)\cos\varphi^3 = G, \text{ und}$$

$$\cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{G}{K+G}} \text{ wird.}$$

Man setze $G = 140$ ℔, $K = 60$ ℔, so bekommt man $\cos\varphi = \sqrt[3]{\tfrac{7}{10}} = 0{,}8879038 + \varphi = 27°23'$, und $R = 84 \tan 27°23' = 43\tfrac{1}{2}$ ℔. Dabey ist alsdann die Geschwindigkeit $v = 3{,}36$, oder beynahe $3\tfrac{1}{3}$ Fuß.

Von der Kraft der Arme zum Ziehen.

§. 145.

Die Kraft, die der Mensch im Arme besitzt, etwas zu sich hin zu ziehen, oder von sich wegzuschieben, läßt sich im Allgemeinen nicht größer, als etwa zu 40 oder höchstens 60 ℔ annehmen, wiewohl sie bey starken und geübten Leuten nahe an 100 ℔ betragen kann. Eine größere oder geringere Beugung des Armes bewirkt darin keinen merklichen Unterschied, ausgenommen, daß er durch eine unbequeme Lage, z. B. wenn man ihn zu weit ausstreckt, oder dem Leibe zu nahe bringt, an der Ausübung seiner völligen Kraft etwas gehindert wird; worauf man aber bey Handmaschinen, als Kurbeln, Armrädern u. dergl. auch allemal Rücksicht nehmen muß.

§. 146.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit v zu bestimmen, womit ein Arbeiter eine gegebene Last P vermittelst eines Armrades aufwinden kann.

Aufl 1) Durch die Kraft, die der Mensch mit dem Arme anwendet, die Hörner oder Spillen des Rades zu sich hinzuziehen, wird die Last P bey jedem Zuge Anfangs beschleunigt. Wir wollen diese Kraft $= K$ setzen.

2) Ferner sey die Geschwindigkeit der Last während ihrer Beschleunigung für eine bestimmte Zeit t $=$ u, so ist die virtuelle Kraft der Bewegung $= \frac{Pdu}{2gdt}$. Diese nach entgegengesetzter Richtung angebracht, also mit P verbunden, giebt eine Kraft $= P(1 + \frac{du}{2gdt})$, womit K im Gleichgewichte seyn muß.

3) Nennt man demnach $m : 1$ das Verhältniß der Halbmesser des Rades und der Welle, so bekommt man die Gleichung:

$$mK = P(1 + \frac{du}{2gdt}).$$

4) Aus dieser wird $du = 2gdt(\frac{mK}{P} - 1)$, und wenn man der Kürze wegen $\frac{mK}{P} - 1 = p$ setzt:

$$u = 2gpt$$

folglich der Raum, den die Last in der Zeit t zurücklegt:

$$x = gpt^2.$$

5) Gegen das Ende des Zuges hört die Beschleunigung auf, und die Last steigt alsdann nach, sich selbst überlassen, zu einer Höhe, die ihrer zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit u als Fallhöhe zugehört. Diese Höhe ist $= \frac{u^2}{4g} = gp^2t^2$, und wenn man die Zeit, die darauf verfließt, $= t'$ setzt, so hat man $gt'^2 = gp^2t^2$, folglich $t' = pt$.

6) Beyde Räume x und $\frac{u^2}{4g}$ addirt, geben den ganzen Raum, um den die Last bey jedem Zuge fortrückt $= gpt^2 + gp^2t^2 = gt^2 \cdot p\,(1 + p)$, und diesen durch die Summe der beyden Zeiten t und $t' = (1 + p)\,t$ dividirt, giebt die mittlere Geschwindigkeit der Last $v = gpt$.

7) Die natürliche Weite, die die Hand des Menschen während eines Zuges durchläuft, ist eine an sich bestimmte Größe, und kann der Länge seines Armes gleich geschätzt werden. Man setze sie $= b$, so wird eben der Raum (6) auch $= \frac{b}{m}$, folglich

$$\frac{b}{m} = gt^2 \cdot p\,(1 + p).$$

8) Dadurch bekommt man $t = \sqrt{\frac{b}{mgp\,(1 + p)}}$,

und wenn man diesen Werth für t in v substituirt:

$$v = \sqrt{\frac{bgp}{m\,(1 + p)}}, \text{ oder}$$

$$v^2 = \frac{bgp}{m\,(1 + p)} = \frac{bg}{m} \cdot \left(1 - \frac{P}{mK}\right).$$

§. 147.

1. Für $P = mK$ wird $v = o$; also ist mK die Last, die mit der Stärke des Armes im Gleichgewichte steht, welches auch schon für sich klar ist.

2. Man setze die Geschwindigkeit, womit der Mensch das bloße Seil in die Höhe winden kann, wenn keine Last daran hängt, $= c$, so erhält man für $P = o$, $c^2 = \frac{bg}{m}$. Dies in die Formel substituirt, giebt:

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{P}{mK}\right).$$

3. Hieraus wird gegenseitig:

$$P = mK \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

§. 148.

Wenn man, wie im §. 134., annimmt, daß der Mensch bey anhaltender Arbeit nur einen Theil W seiner ganzen Armkraft K anwendet, und daß dadurch der Ueberrest $K = W$ in jedem Zeittheilchen dt die Abnahme $= \frac{1}{n} Wdt$ leidet, so erhält man für die Dauer der allmähligen Erschöpfung $T = \frac{n(K - W)}{W}$. Die Arbeit kann also desto längere Zeit hindurch fortgesetzt werden, je weniger Kraft darauf verwandt wird; dagegen ist aber dann die Geschwindigkeit $v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{mW}\right)}$ für eine gegebene Last P desto geringer. Hieraus folgt, daß es irgend einen Werth für W geben müsse, wobey die Wirkung am größten, oder das Produkt Tv ein Maximum ist, und man darf nur, um diesen zu finden, $d.Tv$ oder $dT^2v^2 = 0$ setzen. Substituirt man nun für T^2 und v^2 ihre Werthe, so wird mit Weglassung der beständigen Faktoren:

$$d\left[\left(1-\frac{P}{mW}\right)\frac{(K-W)^2}{W^2}\right]=0.$$

Dies giebt:

$mW(K-W)^2 - 2W(mW-P)(K-W) = 3(mW-P)(K-W)^2$, oder, wenn man mit $K-W$ dividirt

$$mWK - 3mW^2 + 2WP = 3mWK - 3mW^2 - 3PK + 3PW,$$

$$\text{woraus } W = \frac{3KP}{2mK+P} \text{ wird.}$$

Man setze diesen Werth für W in v, so erhält man:

$$v^2 = \tfrac{1}{3}c^2\left(1-\frac{P}{mK}\right)$$

für die vortheilhafteste Geschwindigkeit, womit eine gegebene Last P vermittelst eines Armrades oder Haspels aufgewunden werden kann, wenn dabey zugleich auf die längste Dauer der Bewegung Rücksicht genommen wird.

§. 149.

Der absolute Werth der Arbeit richtet sich theils nach der Last P, die in Bewegung gesetzt wird, theils nach dem Raume s, durch den sie fortrücken soll, und wächst mit beyden Größen im einfachen Verhältnisse, oder ist dem Produkte Ps proportional. Dies Produkt durch die Zeit t dividirt, die während der Arbeit verfließt, giebt ihren Werth für jede Zeitsekunde $= \frac{Ps}{t} =$ Pv, wonach man den Gewinn, der aus der Arbeit entsteht, zu schätzen hat. Der Mensch benutzt also seine Kraft mit mehr oder weniger Vortheil, je nachdem das Produkt Pv aus der Last in ihre Geschwindigkeit größer oder geringer ist, das man deshalb auch wohl sein **mechanisches Moment** zu nennen pflegt.

§. 150.

Um die Last P zu finden, wofür Pv ein Maximum wird, multiplicire man die für v^2 erhaltene Formel noch durch P^2, und setze das Differenzial von dem Produkte $= 0$, so bekommt man $2P - \frac{3P^2}{mK} = 0$, und $P = \frac{2}{3} mK$. Für diesen Werth von P wird ferner $v^2 = \frac{1}{9} c^2$, oder $v = \frac{1}{3} c$; also das größte mechanische Moment des Menschen $= \frac{2}{9} mcK = \frac{2}{9} K\sqrt{mbg}$.

Man sieht hieraus, daß ein größeres Rad mehr Vortheil gewährt, als ein kleineres, daß aber die Wirkung nur wie die Quadratwurzel aus der Verhältnißzahl m zunimmt. Indeß ist doch begreiflich, daß die Masse des Rades selbst, die hier nicht in Betracht gezogen ist, in diesem Gesetze einige Aenderung verursachen müsse, wodurch der Vortheil bey einem zu großen Rade wieder aufgehoben, und das Maximum der Wirkung nur auf ein gewisses Verhältniß zwischen Rad und Welle eingeschränkt wird.

Exempel. Es sey $K = 45$ ℔, $b = 2$ Fuß (§. 146. 7.), $m = 4$, so wird das Moment $= 10\sqrt{125}$

$= 111{,}8$ ℔, und, wenn wir Last und Geschwindigkeit auf den Umfang des Rades reduciren, die Last $= \frac{2}{3}K$ $= 30$ ℔, die Geschwindigkeit $= \frac{1}{3}\,cm = \frac{1}{3}\sqrt{mbg}$ $= 3{,}73$ Fuß.

§. 151.

Aufgabe. Eine gegebene Last P soll durch einen Menschen vermittelst einer Rolle aufgewunden werden; man fragt, mit welcher Geschwindigkeit dies geschehen könne?

Aufl. 1) Der Mensch ergreift bey jedem Zuge das Seil mit ausgestrecktem Arme, hängt sich daran, und läßt dann seinen Körper mit beschleunigter Bewegung herabsinken. Es sey das Gewicht desselben $= G$, die Geschwindigkeit, nachdem die Beschleunigung t Sekunden hindurch gedauert hat, $= u$, der durchlaufene Raum $= x$, so hat man (§. 116.)

$$u = 2gt\left(\frac{G - P}{G + P}\right), \text{ und}$$

$$x = gt^2 \cdot \left(\frac{G - P}{G + P}\right).$$

2) Zu Ende derselben steigt die Last mit der erhaltenen Geschwindigkeit u noch um $\frac{u^2}{4g}$, wozu x addirt, den ganzen Raum giebt, um den die Last bey jedem Zuge fortrückt. Dieser Raum muß so groß seyn, daß ihn der Mensch, wenn er die Arme nach entgegengesetzten Richtungen ausgestreckt hat, mit beyden Händen bequem abreichen kann; man setze ihn $= h$, so wird:

$$h = x + \frac{u^2}{4g},$$

oder, wenn man $\frac{G - P}{G + P} = p$ nennt,

$$h = gt^2 \cdot p\,(1 + p)$$

folglich $t = \sqrt{\frac{h}{gp\,(1 + p)}}$.

3) Die Zeit, während der die Last sich selbst überlassen ist $= pt$, also die Zeit des ganzen Zuges $= (1 + p)\,t$. Diese in h dividirt, giebt die verlangte Geschwindigkeit

$$v = gtp = \sqrt{\frac{ghp}{1 + p}} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}gh\,(1 - \frac{P}{G})\right]}.$$

§. 152.

1. Hieraus wird die Geschwindigkeit c, womit der Mensch das bloße Seil, wenn keine Last daran hängt, herabziehen kann, $= \sqrt{\tfrac{1}{2}gh}$. Setzt man $h = 4$ Fuß, welches der größte Werth ist, der sich dafür annehmen läßt, so bekommt man $c = 5{,}59$ Fuß.

2. Die Formel erhält also wieder dieselbe Gestalt, wie in den vorhergehenden Fällen, nemlich:

$$v^2 = c^2\,(1 - \frac{P}{G})$$

oder gegenseitig $P = G\,(1 - \frac{v^2}{c^2})$,

die für das Maximum des Moments Pv, wie vorhin gezeigt ist, $P = \tfrac{2}{3}G = 93\tfrac{1}{3}$ ℔, und $v = c\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 3\tfrac{1}{5}$ Fuß giebt.

3. Eine größere Wirkung kann der Mensch auf

diese Art durch die Kraft seiner Arme nicht hervorbringen; er kann sie aber dadurch nach Gefallen vermindern, daß er den untern Theil seines Körpers am Boden ruhen, und bloß den obern Theil durch Beugung der Kniee herabsinken läßt, wodurch nicht allein das Gewicht G, sondern auch der Fallraum h kleiner wird, als vorhin angenommen ist. Wir wollen G = 60 ℔ und h = 2 Fuß setzen, so wird für ihn die vortheilhafteste Last P = 40 ℔, und die Geschwindigkeit, womit er sie erhebt, $v = 2{,}28$ Fuß.

§. 153.

Wird die Last P durch einen Flaschenzug in die Höhe gewunden, so hat man für eine Anzahl von n Rollen in jeder Flasche $p = \frac{2nG - P}{4nG + P}$ (§. 121. 3.), also

$$v = \sqrt{\frac{ghp}{1+p}} = \sqrt{\left[\frac{gh}{2n+1} \cdot \left(1 - \frac{P}{2nG}\right)\right]}$$

Dieser Ausdruck giebt $P = \frac{4}{3}nG$, und $v = \sqrt{\frac{gh}{6n+3}}$, für die Last und ihre Geschwindigkeit, wobey das Moment Pv am größten wird.

Vom Zuge der Thiere.

§. 154.

Es sey das Gewicht eines Pferdes, oder irgend eines andern Lastthieres = G; die größte Last, die man ihm auflegen darf = K; so wird durch die Summe G + K die ganze Kraft desselben ausgedrückt, womit es seinen

Körper vertikal in die Höhe heben kann. Man erhält also für seine Geschwindigkeit beym Forttragen einer Last P, die kleiner als K ist (§. 131.):

$$v = \sqrt{\frac{b^2 g (K - P)}{h (G + K)}},$$

und für seine größte Geschwindigkeit, wenn es mit keiner fremden Last beladen ist:

$$c = \sqrt{\frac{b^2 g K}{h (G + K)}},$$

wo die Größen b und h in Bezug auf das Thier eben die Bedeutung haben, in der sie vorhin für den Menschen genommen wurden. Die Verbindung beyder Formeln giebt dann ferner:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}.$$

Was den Werth von K betrift, so ist es bekannt, daß der Körperbau der meisten Thiere zum Tragen weit weniger als zum Ziehen eingerichtet ist; daher glaube ich nicht, daß man z. B. für ein Pferd, oder einen Ochsen K größer, als zu 200 ℔ annehmen dürfe. Das körperliche Gewicht dieser beyden Thiere kann im Mittel = 800 ℔ gesetzt werden.

§. 155.

Um eine Last fortzuziehen, gebraucht das Thier nur so viel Kraft, als zur Aufhebung des Widerstandes nöthig ist, den ihm die Last nach der Richtung des Zuges entgegensetzt. Die Masse derselben käme nur etwa bey ihrer anfänglichen Beschleunigung in Betracht, deren Dauer aber allemal so gering ist, daß man sie völlig außer Acht lassen kann.

Man setze nun, es sey auf ebenem und horizontalem Boden der Widerstand der fortrückenden Last $= R$, ihre Geschwindigkeit, nachdem die Bewegung gleichförmig geworden ist, $= u$; so muß das Thier, um die Bewegung in dem einmal angenommenen Beharrungszustande zu unterhalten, mit eben der Geschwindigkeit u fortgehen, und zugleich eine Kraft $= R$ nach horizontaler Richtung anwenden. Hierdurch wird ihm begreiflich ein Theil seiner Hebelkraft $G + K$ entzogen, der desto mehr beträgt, je größer die Kraft ist, die auf den horizontalen Zug verwandt wird. Wir wollen ihn W nennen, so entspringt aus der für c gefundenen Formel der gesuchte Werth von u, wenn man darin $K - W$ statt K setzt, und man erhält also:

$$u = \sqrt{\left[\frac{b^2 g}{h} \cdot \frac{K - W}{G + K - W}\right]}$$

oder, wenn man das Quadrat dieses Ausdrucks durch das Quadrat von c dividirt:

$$\frac{u^2}{c^2} = \left(1 - \frac{W}{K}\right) : \left(1 - \frac{W}{G + K}\right).$$

§. 156.

Nach welchem Gesetze der Verlust W, den das Thier an seiner vertikalen Kraft leidet, von dem Widerstande R abhänge, wird sich schwerlich aus seinem Körperbaue mit vollkommener Evidenz herleiten lassen. Am natürlichsten wäre es unstreitig, ihn dem Widerstande proportional zu setzen, wofern die Zeiten, worin die beyden Kräfte R und $G + K - W$ in Ausübung kommen, gleich lange dauerten: aber die erstere wird während der ganzen Zeit T des Schrittes (§. 131.) angewandt, und die letztere ist dagegen nur zu Anfange desselben die Zeit t hindurch, und zu Ende desselben eben so lange, also zusammen in einer Zeit $= 2t$ wirksam; daher verhält sich die Zeit, worin die Kraft R in Thätigkeit gesetzt wird, zu der, worin sie der Kraft $G + K$ den Theil W raubt, wie $T : 2t = 1 + p : 1 = 1 + \frac{K + W}{G} : 1$, und es kann folglich nur das Produkt TK zum Produkte 2tW, oder $(G + K - W) R$ zu GW ein bestimmtes Verhältniß haben. Dies Verhältniß läßt sich nun auf folgende Art sehr leicht bestimmen:

Es sey F der größte Widerstand, den das Thier aus der Stelle zu bringen vermögend ist, so verliert es bey dieser Anstrengung alle Kraft, seinen Schwerpunkt zu heben; es wird also für $R = F$, $W = K$, und man hat daher nach jener Voraussetzung

$$(G + K - W) R : GW = F : K, \text{ oder}$$

$$FGW = (G + K - W) KR;$$

woraus $W = \frac{(G + K) KR}{FG + KR}$ wird.

Dieser Werth für W in obiger Formel substituirt, giebt:

$$1 - \frac{W}{K} = \frac{G(F - R)}{FG + KR}, \text{ und } 1 - \frac{W}{G + K} = \frac{FG}{FG + KR},$$

also

also $\frac{u^2}{c^2} = G(F - R) : FG = 1 - \frac{R}{F}$, oder

$$u^2 = c^2 \left(1 - \frac{R}{F}\right),$$

eine Formel, wonach die Geschwindigkeit des Thieres für einen gegebenen Widerstand gefunden wird.

§. 157.

Durch Umkehrung dieser Formel erhält man:

$$R = F\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

für die Kraft, die das Thier bey einer gegebenen Geschwindigkeit u auf den horizontalen Zug verwenden kann. Hieraus wird, wie wir vorhin gesehen haben, für den Fall, wo das Produkt Ru ein größtes seyn soll, $u = c\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $R = \frac{2}{3} F$. Den Werth von F könnte man bestimmen, wenn man das Zugseil des Thieres nach horizontaler Richtung über eine Rolle gehen ließe, und daran so viel Gewicht hängte, als das Thier im Gleichgewichte zu halten im Stande wäre. Für Pferde setzt man gewöhnlich $F = 400$ ℔, und $c = 12$ Fuß; dies giebt für ihre vortheilhafteste Geschwindigkeit $u = 6{,}928$ Fuß, wobey sie eine Last fortziehen können, die ihnen den Widerstand $R = 266$ ℔ entgegensetzt.

Siebentes Kapitel.

Vom centralen Stoße der Körper.

§. 158.

Ein Körper, der auf seinem Wege mit einem andern zusammentrift, durch den er gehindert wird, seine Bewegung frey fortzusetzen, übt gegen diesen so lange einen Druck aus, als er ihn vor sich aus der Stelle zu treiben hat, und bringt dadurch in dessen Bewegung Aenderungen hervor. Da aber dieser Druck einen eben so großen Gegendruck des andern Körpers auf ihn veranlaßt, so leidet hierbey auch seine eigene Bewegung von Zeit zu Zeit Aenderungen. Diese gegenseitige Wirkung der beyden Körper auf einander nennt man den **Stoß** derselben.

§. 159.

Der Druck, der während des Stoßes zwischen den Körpern statt findet, geschieht zunächst gegen die Ebene, in der sie sich berühren, und zwar nach einer auf sie senkrechten Richtung: denn gesetzt, er hätte irgend eine schiefe Richtung gegen dieselbe, so ließe er sich in einen darauf senkrechten, und in einen mit ihr parallelen Theil zerlegen, von denen der erstere doch nur allein wirksam seyn könnte.

§. 160.

Fig. 17. Wenn die Linie AB, worin die Schwerpunkte

A und B der beyden Körper liegen, auf ihrer Berührungsebene KI senkrecht ist, so heißt der Stoß **central.** Es fällt alsdann die mittlere Richtung des Druckes mit dieser Linie zusammen, und geht folglich sowohl durch den Schwerpunkt des einen als des andern Körpers: denn man zerlege eine jede der Richtungen Aa und Bb, nach denen die Schwerpunkte sich bewegen, in eine auf die Ebene KI senkrechte, AC, BC, und in eine damit parallele, Af, Bg; so gleiten die Körper vermöge der letztern Bewegung neben einander hin, ohne auf einander zu wirken, und nur durch die erstere entsteht von beyden Seiten her auf die Ebene KI ein senkrechter Druck, der in C seinen Mittelpunkt hat, und folglich vom Punkte A aus nach B, und umgekehrt von B aus nach A gerichtet ist.

§. 161.

Beym centralen Stoße wirken also die Körper gegenseitig einer auf den Schwerpunkt des andern, und wenn daher ihre Bewegung Anfangs fortrückend ist, so bleibt sie auch während des Stoßes, und nach demselben, noch fortrückend. Dieser Eigenschaft wegen, die dem centralen Stoße ausschließend zukommt, werden wir uns auf dessen Betrachtung im gegenwärtigen Kapitel allein einschränken, da bisher noch von keiner andern Bewegung, als der fortrückenden, gehandelt ist.

§. 126.

Bey Kugeln, die aus gleichartigen Materien bestehen, und ihre Gestalt durch den Stoß nicht weiter verändern, als daß sie sich an der Stelle, wo sie zusammentreffen, platt drücken, ist der Stoß ohne weitere Bedingung allemal central. Ihre Berührungsebene KI ist nemlich jederzeit ein zu beyden gehöriger Parallelkreis, und ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte A der einen Kugel darauf gefällt, geht folglich durch dessen Mittelpunkt C, also verlängert, auch durch den Mittelpunkt B der andern Kugel; mithin steht die Linie AB, durch die Mittelpunkte der beyden Kugeln gezogen, auf ihrer gemeinschaftlichen Berührungsebene senkrecht.

§. 163.

Wenn die Linie AB zugleich in die Richtung fällt, die die Schwerpunkte der beyden Körper vor dem Stoße haben, so wird diese durch den Stoß nicht geändert. Man nennt alsdann den Stoß **gerade**; jeden andern centralen Stoß hingegen nennt man schief.

Kugeln z. B., deren Richtungen in die Linie fallen, die durch ihre Mittelpunkte geht, stoßen einander allemal gerade, so wie auch zwey Cylinder, deren Axen in einer und derselben geraden Linie liegen, und die sich nach der Richtung ihrer Axen bewegen.

Vom geraden Stoße.

§. 164.

Wenn zwey unvollkommen harte Körper gegen einander stoßen, so ist begreiflich, daß dadurch der Zusammenhang ihrer Theile leiden müsse. Was zunächst von beyden Körpern in Berührung kommt, wird ihrem gegenseitigen Drucke auszuweichen suchen, und der eine Körper wird folglich so lange in den andern eindringen, bis die Kraft, die er dazu anwendet, dem Widerstande der Cohäsion des andern gleich geworden ist. Hierdurch wird der nachfolgende Körper in seiner Bewegung aufgehalten, und der voraufgehende beschleunigt, so daß beyder Geschwindigkeiten einander immer näher und näher kommen, und folglich zuletzt gleich groß werden müssen.

§. 165.

Sind die beyden Körper unelastisch, d. h., haben sie kein Bestreben, ihre veränderte Form wieder herzustellen, so ist der Stoß vollendet, sobald ihre Geschwindigkeiten einander gleich geworden sind: denn da der Eindruck, den sie in einander hervorgebracht haben, bleibend ist, so kann nun jeder seine Bewegung ungehindert fortsetzen. Beyde Körper bilden jetzt gleichsam Theile eines zusammenhängenden Ganzen, von denen der eine dem andern folgt, ohne durch ihn irgend eine Veränderung seines Zustandes zu erfahren.

§. 166.

Aufgabe. Zwey unelastische Körper, deren Massen M und M′ sind, bewegen sich nach einer gemeinschaftlichen Richtung mit den Geschwindigkeiten c und c′. Der erstere, der dem letztern nachfolgt, ereilt ihn vermöge seiner größern Geschwindigkeit, und übt einen geraden Stoß gegen ihn aus; man sucht die Geschwindigkeit beyder zu Ende des Stoßes.

Aufl 1) Man setze, nachdem der Stoß eine Zeit t hindurch gedauert hat, sey die Geschwindigkeit der Masse $M = v$, die der Masse $M' = v'$ geworden; der Druck beyder Massen gegen einander sey in diesem Augenblicke $= \Pi$.

2) Da dieser Druck, in sofern ihn der Körper M leidet, gegen die Richtung desselben geschieht, so hat man für die augenblickliche Aenderung seiner Geschwindigkeit

$$dv = -\frac{2g\Pi dt}{M}.$$

3) Beym andern Körper M' hingegen, der eben den Druck nach der Richtung seiner Bewegung auszustehen hat, ist:

$$dv' = \frac{2g\Pi dt}{M'}.$$

4) Beyde Gleichungen verbunden, geben demnach:

$$Mdv = -M'dv', \text{ oder}$$

$$Mdv + M'dv' = 0, \text{ wovon die Integralgleichung:}$$

$$Mv + M'v' = C \text{ ist.}$$

5) Zu Anfange des Stoßes, oder für $t = 0$, war $v = c$, und $v' = c'$; man erhält also $C = Mc + M'c'$, und folglich:

$$Mv + M'v' = Mc + M'c',$$

eine Gleichung, die das Gesetz ausdrückt, nach welchem die Geschwindigkeiten v und v' der beyden Körper während des Stoßes von einander abhängen.

6) Es sey nun für das Ende des Stoßes der Werth von v und v', oder die gemeinschaftliche Ge-

schwindigkeit, die die Körper alsdann bekommen, $= \varkappa$; so giebt jene Gleichung, wenn man darin $v = v' = \varkappa$ setzt:

$$(M + M')\,\varkappa = Mc + M'c',$$

$$\text{also: } \varkappa = \frac{Mc + M'c'}{M + M'}.$$

§. 167.

1. Was der Körper M durch den Stoß an Geschwindigkeit verloren hat, beträgt $c - \varkappa = \frac{(c - c')\,M'}{M + M'}$, und was der andere Körper M' durch ihn gewonnen hat: $\varkappa - c' = \frac{(c - c')\,M}{M + M'}$. Es ist also:

$$(c - \varkappa) : (\varkappa - c') = M' : M,$$ d. h.

die Aenderungen, die zwey unelastische Körper durch den Stoß in ihren Geschwindigkeiten erleiden, verhalten sich verkehrt, wie ihre Massen.

2. Ist der Körper M' vor dem Stoße in Ruhe, also $c' = 0$, so wird beyder Geschwindigkeit nach dem Stoße: $\varkappa = \frac{Mc}{M + M'}$.

3. Wenn die beyden Körper mit ihren Geschwindigkeiten c, c' sich gegen einander bewegen, so nehme man die Richtung, die der eine z. B. M hat, als absolut an; alsdonn ist die Geschwindigkeit des andern c' in Bezug auf c negativ, folglich ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit zu Ende des Stoßes $\varkappa = \frac{Mc - M'c'}{M + M'}$.

Je nachdem also Mc größer oder kleiner als $M'c'$ ist, erhält x einen positiven oder negativen Werth, d. h. die Körper bewegen sich nach dem Stoße gemeinschaftlich nach der Richtung desjenigen, bey dem das Produkt aus der Masse in die Geschwindigkeit vor dem Stoße am größten war.

§. 168.

Aufgabe. Die Geschwindigkeiten der beyden Körper M und M' nach dem Stoße zu bestimmen, wenn sie vollkommen elastisch sind, und sich vor dem Stoße mit den Geschwindigkeiten c und c' nach einerley Richtung AB bewegen.

Fig. 18. Aufl. 1) Es sey der Abstand AB ihrer Schwerpunkte A und B zu Anfange des Stoßes $= a$; nach Verlauf einer Zeit t sey der erstere um $AP = x$, der letztere um $BQ = x'$ fortgerückt, und beyder Entfernung PQ alsdann $= a - w$, so hat man:

$$PQ = AB + BQ - AP, \text{ oder}$$
$$a - w = a + x' - x, \text{ also}$$
$$w = x - x'.$$

2) Ferner sey in diesem Augenblicke die Geschwindigkeit des Körpers $M = v$, die von $M' = v'$ geworden, so sind $\frac{Mdv}{2gdt}$ und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ die Kräfte, wodurch die Körper nach der gemeinschaftlichen Richtung AB getrieben werden, oder: es ist $-\frac{Mdv}{2gdt}$ die Kraft, die auf den Schwerpunkt P des Körpers M nach der Richtung

PA, und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ die Kraft, die auf den Schwerpunkt Q des Körpers M' nach der Richtung BQ jetzt wirken muß.

3. Diese Kräfte, nach den entgegengesetzten Richtungen AP und QB auf dieselben Punkte P und Q angebracht, müssen also die Körper in der Lage, worin sie sich jetzt befinden, im Gleichgewichte halten (§. 115.).

4) Die Theile beyder Körper, die zwischen ihren Schwerpunkten P und Q liegen, sind durch deren Annäherung zusammengedrückt, und haben also jeder ein Bestreben bekommen, sich nach beyden Seiten gleich stark auszudehnen. Wir wollen diese Expansivkraft für den Körper $M = \Pi$, für $M' = \Pi'$ setzen, so müssen beyde sowohl unter sich, als mit den äußern Kräften — $\frac{Mdv}{2gdt}$ und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ Gleichgewicht hervorbringen; daher bekommt man

$$\Pi = \Pi', \; \Pi = -\frac{Mdv}{2gdt}, \text{ und } \Pi' = \frac{M'dv'}{2gdt}, \text{ folglich}$$

$$Mdv + M'dv' = 0,$$

wodurch die nemliche Gleichung

$$Mv + M'v' = Mc + M'c'$$

entsteht, wie bey unelastischen Körpern (§. 166. 5.).

5) Die Kraft Π ist nach der bekannten Eigenschaft elastischer Körper von der Zusammenpressung ihrer Theile abhängig, und da diese in gegenwärtigem Falle auf der größern oder geringern Entfernung der Schwerpunkte beyder Körper beruhet, so richtet sie sich nach

dem Werthe von w, und hat also für einerley w eine und dieselbe Größe.

6) Da $v = \frac{dx}{dt}$, und $v' = \frac{dx'}{dt}$, so wird (1)

$$\frac{dw}{dt} = v - v'.$$

So lange also die Geschwindigkeit des nachfolgenden Körpers M größer ist, als die des vorangehenden M', ist dw positiv, mithin w wachsend, d. h. die Schwerpunkte nähern sich da noch einander.

7) Für $v = v'$ wird $\frac{dw}{dt} = 0$, also w ein Maximum, oder: der Abstand der Schwerpunkte der beyden Körper ist dann am kleinsten, wenn ihre Geschwindigkeiten gleich groß geworden sind.

8) In diesem Augenblicke leiden also die zwischen P und Q befindlichen Theile beyderseits die stärkste Zusammenpressung, und der Druck Π, den sie gegen einander ausüben, hat folglich jetzt seinen größten Werth erreicht. Es kann daher die Wirkung des Stoßes nicht, wie bey unelastischen Körpern, mit der Gleichheit ihrer Geschwindigkeiten aufhören; sie muß nothwendig noch so lange fortdauern, bis beyde Körper wieder ihre vorige Gestalt bekommen haben, oder $w = 0$ geworden ist.

9) Die beyden Gleichungen $Mdv = -2g\Pi dt$, und $M'dv' = 2g\Pi dt$ (4) noch durch $2v$ und $2v'$ multiplicirt, und dann addirt, geben:

$$2Mvdv + 2M'v'dv' = -4g\Pi(v - v')dt = -4g\Pi dw,$$

wovon die Integralgleichung

$$Mv^2 + M'v'^2 = C - 4g\int \Pi dw \text{ ist.}$$

10) Zu Anfange des Stoßes war $w = o$, $\Pi = o$, mithin auch das Integral $\int \Pi dw = o$, und außerdem $v = c$, $v' = c'$, also

$$Mc^2 + M'c'^2 = C.$$

Dies für C in die Gleichung substituirt, giebt:

$$Mv^2 + M'v'^2 = Mc^2 + M'c'^2 - 4g\int \Pi dw.$$

11) Da nun für einerley w der Werth von Π, folglich auch der des Integrals $\int \Pi dw$ derselbe ist, so muß für das Ende des Stoßes, wo w wieder $= o$ wird (8), auch $\int \Pi dw$ zum zweyten male verschwinden. Nennt man daher $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Geschwindigkeiten der beyden Körper nach vollendetem Stoße, so erhält man:

$$M\varkappa^2 + M'\varkappa'^2 = Mc^2 + M'c'^2,$$

oder $M(c^2 - \varkappa^2) + M'(c'^2 - \varkappa'^2) = o.$

12) Außerdem ist nun auch:

$$M\varkappa + M'\varkappa' = Mc + M'c' \ (4), \text{ oder}$$

$$M(c - \varkappa) + M'(c' - \varkappa') = o.$$

Diese Gleichung noch durch $c + \varkappa$ multiplicirt, und dann von der vorhergehenden subtrahirt, bleibt:

$$M'(c'^2 - \varkappa'^2) - M'(c' - \varkappa')(c + \varkappa) = o, \text{ woraus}$$

$$c + \varkappa = c' + \varkappa', \text{ und folglich}$$

$$\varkappa' = c - c' + \varkappa \text{ wird.}$$

13) Dies für $\varkappa'$ in letzterer Gleichung substituirt, giebt endlich:

$$\varkappa = \frac{Mc + M'(2c' - c)}{M + M'} = c - \frac{2M'(c - c')}{M + M'}, \text{ und}$$

$$\varkappa = \frac{M'c' + M\,(2c - c')}{M + M'} = c' + \frac{2M\,(c - c')}{M + M'}.$$

§. 169.

1. Die Geschwindigkeit des Körpers M ist demnach durch den Stoß um $\frac{2M'\,(c - c')}{M + M}$ vermindert, und die des Körpers M' um $\frac{2M\,(c - c')}{M + M'}$ gewachsen; also betragen die Aenderungen, die mit den Geschwindigkeiten der beyden Körper während des Stoßes vorgehen, bey elastischen Körpern doppelt so viel, als bey unelastischen (§. 167. 1.).

2. Da $c + \varkappa = c' + \varkappa'$ (12.), so wird $\varkappa' - \varkappa = c - c'$. Die Unterschiede zwischen den Geschwindigkeiten zweyer elastischen Körper sind daher vor und nach dem Stoße gleich groß, aber von entgegengesetzter Art; es ist nemlich zu Ende des Stoßes die Geschwindigkeit des vorangehenden Körpers M' größer als die des nachfolgenden M, statt daß sie anfänglich kleiner als jene war.

3) Sind die Massen M und M' einander gleich, so erhält man $\varkappa = c'$, und $\varkappa' = c$. In diesem Falle tauschen also die Körper beym Stoße ihre Geschwindigkeiten gegeneinander um, oder: der eine bekommt nach dem Stoße eben die Geschwindigkeit, die der andere vor demselben hatte.

4. Wenn sich die beyden Körper M und M' vor dem Stoße mit den Geschwindigkeiten c und c' begeg-

nen, also der letztere M' die entgegengesetzte Richtung BA hat, so ist seine Geschwindigkeit c' gegen die des andern c negativ; also wird nach dem Stoße

$$\varkappa = c - \frac{2M'(c + c')}{M + M'}, \text{ und}$$

$$\varkappa' = -c' + \frac{2M(c + c')}{M + M'}.$$

5) Von diesen Formeln giebt erstere für $\varkappa$ einen negativen Werth, wofern $M'c' > \frac{1}{2} c (M - M')$, und letztere für $\varkappa'$ einen positiven Werth, wofern $Mc > \frac{1}{2} c' (M' - M)$ ist; in jenem Falle wird also M, in diesem M' zum Umkehren genöthigt, oder seine anfängliche Richtung durch den Stoß in die entgegengesetzte verwandelt.

§. 170.

Fig. 19. **Aufgabe.** Ein elastischer Körper M stößt mit der Geschwindigkeit c in senkrechter Richtung GQ gegen eine unbewegliche Ebene AB; man sucht die Geschwindigkeit, womit er von ihr zurückprallt.

Aufl 1) Wenn der Körper die Ebene zuerst berührt, liege sein Schwerpunkt in G; nach Verlauf einer Zeit t sey derselbe um $GP = x$ fortgerückt, und seine Geschwindigkeit alsdann $= v$.

2 Zu Folge dieser Geschwindigkeit muß ihn nach der Richtung seiner Bewegung eine Kraft $= \frac{Mdv}{2gdt}$ beschleunigen, und wenn man also nach eben der Richtung die Kraft $- \frac{Mdv}{2gdt}$ auf ihn wirken läßt, muß dadurch

der Körper in seinem gegenwärtigen Zustande im Gleichgewichte gehalten werden.

3) Der Theil von der ganzen Masse des Körpers, der Anfangs zwischen G und O lag, ist jetzt in den engern Raum PO zusammengedrückt, und hat dadurch eine ausdehnende Kraft bekommen, die von seiner Verdichtung, oder vom Raume $GP = x$ abhängig ist.

4) Diese Kraft, die wir $= \Pi$ setzen wollen, wirkt nach entgegengesetzten Seiten sowohl auf die Ebene AB, als auf den Schwerpunkt des Körpers P. Auf der einen Seite wird sie durch den Widerstand der unbeweglichen Ebene aufgehoben, also muß auch eben dies auf der andern Seite im Punkte P durch die Kraft $-\frac{Mdv}{2gdt}$ geschehen; mithin muß $-\frac{Mdv}{2gdt} = \Pi$ seyn.

5) Hieraus erhält man $Mdv = -2g\Pi dt$, also einen Werth für dv, der beständig negativ ist, welches anzeigt, daß v fortwährend abnehme. Wenn nun $v = 0$ geworden ist, so ist x, wegen der Gleichung $v = \frac{dx}{dt}$, am größten, folglich hat alsdann auch die Kraft Π ihr Maximum erreicht, so daß also v nothwendig noch ferner abnehmen und ins Negative übergehen muß. Dies dauert so lange, bis Π zum zweyten male $= 0$, mithin auch $x = 0$ geworden ist, oder bis der Körper wieder seine vorige Gestalt bekommen hat; womit dann die Wirkung des Stoßes sich endigt.

6) Die vorige Gleichung (5) noch durch $2v$ multiplicirt, und darin dx für vdt gesetzt, giebt:

$$2M\,dv = -4g\Pi dx,$$

wovon das Intrgral:

$$Mv^2 = C - 4g\int\Pi dx \text{ ist.}$$

7) Nimmt man nun das Integral $\int\Pi dx$ so, daß es für $x = 0$ verschwindet, so wird für den Anfang des Stoßes $Mc^2 = C$, und da für das Ende desselben wieder $x = 0$, folglich auch $\int\Pi dx = 0$ ist, so erhält man für die Geschwindigkeit $\varkappa$ des Körpers nach dem Stoße ebenfalls: $M\varkappa^2 = C$, also $M\varkappa^2 = Mc^2$, und $\varkappa = \mp c$.

8) Daß hier nur das obere Zeichen für $\varkappa$ gelten könne, ist nicht allein an sich klar, sondern wird auch durch die Betrachtung (5) außer Zweifel gesetzt. Es ist demnach $\varkappa = -c$, d. h. der Körper wird mit eben der Geschwindigkeit von der Ebene reflektirt, womit er gegen sie anstieß.

§. 171.

Fig. 20. Wenn der Körper mit der Geschwindigkeit c gegen die Ebene in einer schiefen Richtung FG anstößt, die mit ihr den Winkel $FGa = I$ macht, so läßt sich solche in eine mit ihr parallele nach $Gg = c \cos I$, und in eine auf sie senkrechte nach $Gr = c \sin I$ zerlegen. Vermöge der erstern gleitet der Körper ohne Hinderniß an der Ebene fort, und behält also diese Geschwindigkeit ungeändert bey, während die andere $c \sin I$, womit er gerade gegen die Ebene anstößt, nach und nach vermindert, und zuletzt in die entgegengesetzte $-c \sin I$

verwandelt wird (§. 170. 8.). Dies geschieht, wenn sein Schwerpunkt in g wieder dieselbe Entfernung von der Ebene bekommen hat, als in G, wo er sie zuerst berührte (5.).

Er bewegt sich also dann mit der Geschwindigkeit c Sin I nach der entgegengesetzten Richtung $g\rho$, und zugleich mit der Geschwindigkeit c Cos I parallel der Ebene nach gb, woraus eine zusammengesetzte Geschwindigkeit = c nach einer Richtung gf entsteht, die ebenfalls unter dem Winkel fgb = I gegen die Ebene geneigt ist; d. h. der Körper wird mit seiner anfänglichen Geschwindigkeit unter demselben Winkel von der Ebene reflektirt, unter dem er gegen sie zuerst anstieß.

Während des Stoßes bewegt sich der Schwerpunkt des Körpers in einer Kurve Gog, die sich in G und g endigt, oder in die geradlinigten Schenkel GF, gf übergeht, und in der Mitte o ihren Scheitel hat. So lange seine senkrechte Geschwindigkeit noch positiv ist, beschreibt er den niedersteigenden Arm derselben Go, erreicht im Scheitel o seinen kürzesten Abstand von der Ebene, und entfernt sich nochmals wieder von ihr in dem aufsteigenden Arme og.

Ueber das Einsinken fester Körper in weichen Boden.

§. 172.

Wie viel Widerstand ein fester Körper von gegebener Form und Masse beym Eindringen in weichen Boden

den findet, und zu welcher Tiefe er darin nach Verhältniß seiner anfänglichen Geschwindigkeit, und der Beschaffenheit des Bodens gelangt, ist zwar von mehreren Schriftstellern, aber größtentheils nur sehr mangelhaft und mit Zuziehung willkührlicher Hypothesen untersucht. Das Lehrreichste und Gründlichste über diesen Gegenstand enthält eine Abhandlung von **Lambert** in den Mem. de l'acad. de Berlin 1772, aus der ich hier das Wesentliche in der Kürze und mit den nöthigen Erläuterungen beybringen will.

§. 173.

Der bekannte Erfahrungssatz: **daß die Tiefe, zu denen zwey Prismen von gleicher Basis in einerley Boden von dessen Oberfläche aus der Ruhe herabsinken, sich wie ihre Gewichte verhalten,** wird durch folgende von **Lambert** selbst angestellten Versuche außer Zweifel gebracht.

Er stellte ein Parallelepipedum, wovon die Basis 15 Quadratlinien betrug, behutsam und in senkrechter Richtung auf durchgesiebten, feinkörnigen Sand, dessen Oberfläche vorher genau geebnet war, und ließ es mit einem darauf gelegten Gewichte einsinken. Der Versuch wurde mit mehreren Gewichten wiederholt, und zuvor jedesmal der Sand durch sanftes Umschütteln von neuem locker und eben gemacht. Die Resultate hiervon kann man aus nachstehender Tafel ersehen, in der die erste Kolumne das jedesmalige Gewicht, mit Inbegriff dessen, was das Parallelepipedum wog, in halben Unzen, die zweyte die Tiefe des Eindrucks in Linien, und die dritte das Verhältniß zwischen beyden angiebt:

Gewicht P	Tiefe x	Verhältnißzahl $x : P$
6	2	0,33
7	$2\frac{1}{2}$	0,35
8	$2\frac{1}{2}$	0,32
9	3	0,33
10	$3\frac{1}{2}$	0,35
14	5	0,35
18	6	0,33

In dieser Tafel kommen die Zahlen der letztern Kolumne offenbar einander sehr nahe, und sind überdies abwechselnd bald etwas größer, bald etwas geringer, so daß man wohl kein Bedenken tragen darf, sie für einerley gelten zu lassen, oder das Verhältniß $x : P$ als unveränderlich anzunehmen.

§. 174.

Man setze nun, ein Prisma, dessen Grundfläche $= B$ ist, werde durch sein Gewicht $= G$ in einen Boden von gegebener Materie bis zur Tiefe $= f$ eingedrückt. Ein anderes Prisma, dessen Grundfläche $= S$ ist, sinke in eben den Boden durch sein Gewicht P bis zur Tiefe $= x$. Da sich der Druck von dem Gewichte des Prisma's auf seiner Grundfläche gleichförmig vertheilt, so ist dessen Einheit bey dem letztern $= \frac{P}{S}$; also der Druck, der auf einen Theil seiner Grundfläche $= B$ kommt, $= \frac{PB}{S}$, mithin:

$$f : G = x : \frac{PB}{S}, \text{ oder}$$

$$f : x = \frac{G}{B} : \frac{P}{S}.$$

D. h. die Tiefen der Eindrücke, die zwey Prismen mit ungleichen Grundflächen in einerley Boden machen, wenn sie von dessen Oberfläche aus der Ruhe herabsinken, verhalten sich direkt, wie ihre Gewichte, und verkehrt, wie ihre Grundflächen.

Auch hiermit stimmten andere von Lambert angestellte Versuche ebenfalls vollkommen überein; er fand nemlich bey einerley Gewicht die Tiefen der Eindrücke im umgekehrten Verhältnisse der Grundflächen, woraus sich obige Proportion für verschiedene Gewichte und Grundflächen von selbst ergiebt.

§. 175.

Die Haltbarkeit eines Bodens läßt sich am richtigsten darnach beurtheilen, in welcher Tiefe ein Prisma von bestimmtem Gewichte und gegebener Grundfläche von ihm im Gleichgewichte gehalten wird. Diese Tiefe ist zwar nicht mit der eben betrachteten, zu der das Prisma gelangt, wenn es von der Oberfläche des Bodens herabsinkt, einerley, weil dasselbe bey jeder Bewegung, sie sey noch so gering, nothwendig weiter in den

Boden eindringen muß, als das Gleichgewicht es erfordert; indeß wird doch gewiß erstere der letztern proportional seyn, und also auch eben so vom Gewichte und der Grundfläche des Prisma's, wie jene, abhängen.

§. 176.

Aufgabe. Ein prismatischer Körper, dessen Masse $= M$ ist, sinkt in einen Boden von der Oberfläche desselben mit einer Geschwindigkeit, die der Fallhöhe H zugehört, vertikal herab. Der Boden ist von solcher Beschaffenheit, daß er dem Prisma das Gleichgewicht hält, wenn es in ihn bis zur Tiefe b eingesenkt wird; man sucht die Bewegung des Prisma's, und die größte Tiefe, zu der es gelangt.

Aufl. 1) Nachdem es bis zur Tiefe x gesunken ist, sey die Höhe, der seine Geschwindigkeit zugehört, $= h$; die Kraft, wodurch es getrieben wird, $= P$; so hat man:

$$Mdh = Pdx \text{ (§. 51.)}.$$

2) Die Kräfte, die auf das Prisma eigentlich wirken, sind: das Gewicht desselben M, und der Widerstand, den ihm der Boden entgegensetzt. Wird also zu diesen noch die Kraft P nach vertikal aufwärts gehender Richtung hinzugefügt, so muß sie sich mit ihnen aufheben, oder dasselbe Prisma muß bey dem Gewichte $M = P$ an der Stelle, wo es sich gegenwärtig befindet, mit dem Boden im Gleichgewichte seyn.

3) Dem zufolge ist

$$M - P : M = x : b,$$

also $M - P = \frac{Mx}{b}$, und $P = M\left(1 - \frac{x}{b}\right)$.

4) Diesen Werth für P in obiger Gleichung (1) substituirt, giebt:

$$dh = \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx,$$

und davon das Integral genommen:

$$h = C + x - \frac{x^2}{2b}.$$

5) Nun war an der Oberfläche des Bodens, oder für $x = o$, $h = H$; also wird $C = H$, und folglich

$$h = H + x - \frac{x^2}{2b}.$$

6) Die größte Tiefe, die wir p nennen wollen, erreicht das Prisma, nachdem es alle Bewegung verloren hat; es ist also für $x = p$, $h = o$, mithin

$$o = H + p - \frac{p^2}{2b}, \text{ woraus}$$

$$p = b + \sqrt{(b^2 + 2bH)} \text{ wird.}$$

§. 177.

Für $H = o$ giebt diese Formel $p = 2b$. Wenn also das Prisma in den Boden von der Oberfläche desselben aus der Ruhe einsinkt, so gelangt es zu einer doppelt so großen Tiefe, als diejenige ist, worin ihm der Boden das Gleichgewicht hält. Dieser Satz dient zur Bestätigung dessen, was §. 175. schon zum Voraus angenommen wurde, und gewährt zugleich ein sehr einfaches Mittel, den Werth von b durch Versuche zu finden.

Da aber der Eindruck, den das Prisma in den Boden macht, wenn es auf seine Oberfläche gestellt wird, meistens nur gering ist, so erhält man hierdurch den Werth von b nicht genau genug. Es ist daher zu dieser Absicht vortheilhafter, das Prisma von irgend einer Höhe auf den Boden herabfallen zu lassen: denn da alsdann seine Geschwindigkeit an der Oberfläche desselben dieser Höhe zugehört, so wird aus der Gleichung (6)

$$b = \frac{p^2}{2(H + p)},$$

wovon Zähler und Nenner desto beträchtlicher sind, je größer man die Fallhöhe H angenommen hat.

Lambert ließ das vorhin erwähnte Parallelepipedum von mehreren verschiedenen Höhen in den Sand herabfallen, und fand die Tiefen der Eindrücke für

$H =$	0	12	24	36	48	60	72	144 Lin.
$p =$	0,6	2,5	3,6	4,5	5,3	6,0	6,5	9,0 Lin.

woraus für b folgende Werthe entspringen:

$b =$	0,3	0,21	0,24	0,25	0,26	0,27	0,27	0,26 Lin.

Von diesen stimmen die letztern, wie man sieht, sehr genau überein, und es ist also wohl keinem Zweifel unterworfen, daß die Abweichungen zwischen den vier erstern bloß den unvermeidlichen Fehlern der Beobachtung zuzuschreiben sind.

Noch mehr überzeugt man sich hiervon durch folgende seiner Versuche, bey denen dasselbe Parallelepipedum zwar in etwas dichteren Sand, aber von ungleich größern Höhen, als vorhin, herabfiel. Es war nemlich

für $H =$	144	288	432	575	$720'''$
$p =$	7	10	12	14	$15\frac{1}{2}'''$

Dies giebt für b nachstehende Werthe:

$b =$	0,162	0,167	0,162	0,166	$0{,}163'''$,

die so genau zusammentreffen, als es sich bey Rechnungen dieser Art nur irgend erwarten läßt. Ein Mittel zwischen ihnen genommen ist $b = 0{,}164$; bedient man sich dessen in der oben für p gefundenen Formel, so erhält man:

für $H =$	144	288	432	576	$720'''$
$p =$	7,04	9,88	12,06	13,91	$15{,}53'''$

Von diesen berechneten Tiefen weichen die beobachteten insgesammt nicht mehr, als in einigen Hunderttheilen von Linien ab.

§. 178.

Aufgabe. Die Tiefe p zu finden, zu der das Prisma in den Boden einsinkt, wenn es in irgend einer Tiefe x eine Geschwindigkeit hat, die der Höhe h zugehört.

Aufl. 1) Man nenne H die Höhe, der seine Geschwindigkeit an der Oberfläche des Bodens zugehören muß, wenn es die Tiefe x mit der gegebenen Geschwindigkeit erreichen soll, so erhält man folgende Gleichungen (§. 173. 5. 6.)

$$h = H + x - \frac{x^2}{2b}, \text{ und}$$

$$o = H + p + \frac{p^2}{2b}.$$

2) Von diesen giebt erstere:

$$2bH = x^2 - 2bx + 2bh;$$

letztere: $2bH = p^2 - 2bp$; woraus

$$p^2 - 2bp = x^2 - 2bx + 2bh,$$

und $p = b + \sqrt{[(x-b)^2 + 2bh]}$ folgt.

§. 179.

Die zur Höhe h gehörige Geschwindigkeit würde das Prisma in der Tiefe x des Bogens bekommen, wenn es von der Höhe $H = \frac{x^2}{2b} - x + h$ herabfiele; sie kann ihm aber auch auf jede andere Art, z. B. durch den Stoß oder Schlag mitgetheit werden.

Wir wollen setzen, das Prisma sey Anfangs zu seiner natürlichen Tiefe, wo ihm der Boden das Gleichgewicht hält, herabgesunken, und werde nun durch successive Schläge, wovon ihm jeder eine der Höhe h zugehörige Geschwindigkeit ertheilen mag, nach und nach in denselben weiter eingetrieben, so ist die Tiefe, zu der es gelangt, nach dem ersten Schlage $p' = b + \sqrt{2bh}$, nach dem zweyten $p'' = b + \sqrt{4bh}$, nach dem dritten $p''' = b + \sqrt{6bh}$, und überhaupt, nach dem nten Schlage: $p^{(n)} = b + \sqrt{2nbh}$. Also verhält sich der Raum, um den das Prisma durch wiederhohlte, gleich starke Schläge unter die Tiefe des Gleichgewichtes b einsinkt, wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Schläge.

§. 180.

Die Gleichheit der Schläge wird dadurch bewirkt, daß man einerley Gewicht von gleichen Höhen auf das Prisma herabfallen läßt. Es sey nemlich dies Gewicht $= P$, die Höhe, von der es herabfällt, $= H$, so ist die Geschwindigkeit, womit es das Prisma erreicht, dieser Höhe zugehörig, also $= 2\sqrt{gH}$, folglich die dem Prisma mitgetheilte Geschwindigkeit (§. 167. 2.) $= \frac{2P\sqrt{gH}}{P+M}$, wenn dessen Masse, wie vorhin, $= M$ gesetzt wird. Die dazu gehörige Höhe h ist $= H \left(\frac{P}{P+M}\right)^2$; also für einerley P und H stets dieselbe.

Da das Gewicht auf dem Prisma während des Einsinkens liegen bleibt, so muß man für b den Werth nehmen, der der ganzen Masse $P + M$ entspricht. **Lambert** bediente sich zu seinen Versuchen eines Hammers; er ließ ihn zuerst mit dem Parallelepipedum von der Oberfläche des Sandes herab sinken, und fand die Tiefe des Eindrucks 4‴; also war $b = 2'''$. Jetzt senkte er das Parallelepipedum von neuem um 2‴ in den Boden ein, und ließ den Hammer zu wiederholten malen von 3 Zoll Höhe darauf herabfallen. Die Wirkungen davon, und ihre Vergleichung mit der Theorie, enthält folgende Tafel:

n	$p^{(n)} - b$	Verh.	$\sqrt{n}$
1	3,00	1,00	1,00
2	4,25	1,42	1,41
3	5,33	1,78	1,73
4	6,50	2,17	2,00
5	7,50	2,50	2,23
6	8,25	2,75	2,45
7	8,66	2,89	2,64
8	9,25	3,08	2,83
9	9,75	3,25	3,00
10	10,33	3,44	3,16
11	11,00	3,67	3,31
12	11,50	3,83	3,46

Daß hier die Abweichungen zwischen den Verhältnißzahlen in der dritten Kolumne und den dazu gehörigen Werthen von $\sqrt{n}$ mit der Anzahl der Schläge zunehmen, beweißt ganz und gar nicht die Unzulänglichkeit der Formel $p^{(n)} = b + \sqrt{2nbh}$; denn wenn bey jedem Schlage das Eindringen des Prisma's durch irgend einen Nebenumstand (z. B. dadurch, daß es etwas aus seiner vertikalen Stellung kam) nur um ein Geringes fehlerhaft wurde, so mußte sich nothwendig dieser Fehler nach und nach anhäufen, da jede nächstgrößere Tiefe auf die vorhergehende Bezug hat. Läge die Unrichtigkeit in der Formel, so müßten auch die Aenderungen der Verhältnißzahl von denen des Werthes $\sqrt{n}$ immer mehr und mehr abweichen, welches aber, wie man leicht sieht, der Fall nicht ist.

Anwendung auf das Einrammen der Pfähle.

§. 181.

Aufgabe. Ein Pfeiler, dessen Masse $= M$ ist, sey in den Boden bereits bis zur Tiefe f eingeschlagen. Man läßt auf ihn eine Ramme, deren Gewicht P ist, von der Höhe H herabfallen; wie tief wird er nach dem Schlage gesunken seyn?

Aufl. 1) Es sey die gesuchte Tiefe von der Oberfläche des Bodens angerechnet $= p$; die Höhe, der seine Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Schlage zugehört, $= h$; so ist (§. 178.)

$$p = b + \sqrt{[(f - b)^2 + 2bh]}.$$

2) Ferner ist $h = H\left(\frac{P}{P + M}\right)^2$ (§. 180.), welches für h substituirt:

$$p = b + \sqrt{[(f - b)^2 + 2bH\left(\frac{P}{P + M}\right)^2]}$$ giebt.

3) Wären beyde Körper vollkommen elastisch, so wäre die dem Pfeiler mitgetheilte Geschwindigkeit doppelt so groß (§. 169. 1.), also h das Vierfache von dem hier Angegebenen; da aber das Holz nur in einem gewissen Grade elastisch ist, so kann man allgemein $h = \lambda H\left(\frac{P}{P + M}\right)^2$ annehmen, wo λ eine Zahl bedeutet, die zwischen 1 und 4 fallen muß.

§. 182.

Bekanntlich wird der Fallblock jedesmal zu der Höhe, wovon er auf den Pfeiler herabfallen soll, durch

Arbeiter vermittelst einer Rolle aufgewunden; es fragt sich also, wie das Verhältniß seiner Masse zu der des Pfeilers gewählt werden müsse, damit durch einerley Aufwand von Zeit und Kraft am meisten bey der Sache ausgerichtet werde. Um dies zu finden, nenne man T die Zeit, die während des Aufwindens verfließt, S die gesammte Kraft, die alle Arbeiter zugleich anwenden, n die Anzahl derselben;

1) so kommt auf jeden Einzelnen von der ganzen Last des Fallblocks P der Theil $\frac{1}{n}$ P, und man hat daher für die Geschwindigkeit, womit derselbe gehoben wird:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{nG}\right)} \text{ (§. 152. 2.)}$$

oder, da $nG = S$ ist,

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{S}\right)}, \text{ mithin:}$$

$$H = vT = cT\sqrt{\left(1 - \frac{P}{S}\right)}.$$

2) Die Kosten der Arbeit sind theils der Zeit T, theils der Anzahl der Menschen proportional, und stehen also mit dem Produkte nT in einem bestimmten Verhältnisse. Wofern sie demnach ungeändert bleiben sollen, so muß nT, oder nGT. d. i. ST eine beständige Größe seyn. Man setze diese $= A$, so wird $T = \frac{A}{S}$, folglich:

$$H = \frac{cA}{S}\sqrt{\left(1 - \frac{P}{S}\right)} = cA\sqrt{\left(\frac{S - P}{S^3}\right)}.$$

3) Dies für II in der für p erhaltenen Formel substituirt, giebt:

$$p = b + \sqrt{[(f - b) + 2\lambda bcA \left(\frac{P}{P+M}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{S-P}{S^3}\right)}]},$$

worin die Größen S und P nun so bestimmt werden müssen, daß dadurch p ein Maximum wird.

4) Da b, f, λ, c und A unveränderlich sind, so darf man nur die Werthe von S und P suchen, wofür der Ausdruck $\left(\frac{P}{P+M}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{S-P}{S^3}\right)}$ sein Maximum erreicht.

5) Man sehe zuvörderst P als schon bestimmt, oder bloß S als unveränderlich an, so wird diesem zufolge: $d.\left(\frac{S-P}{S^3}\right) = o$, also $\frac{1}{S^3} = \frac{3(S-P)}{S^4}$, und $S = \frac{3}{2} P$.

6) Dadurch verwandelt sich obiger Ausdruck in $\frac{P\sqrt{12}}{9(P+M)^2}$, wovon das Differenzial nach P genommen, und = o gesetzt, die Gleichung

$$\frac{1}{(P+M)^2} = \frac{2P}{(P+M)^3}$$ giebt, aus welcher:

$$P = M$$ wird, d. h.

es ist zum Einrammen eines Pfeilers am vortheilhaftesten, einen Fallblock zu nehmen, der mit dem Pfeiler einerley Gewicht hat, wie auch Lambert unter einer andern, weniger evidenten Voraussetzung gefunden hat.

7) Ferner bekommt man $S = \frac{3}{2} M$, also $n = \frac{S}{G} = \frac{3M}{2G}$, für die angemessenste Zahl der Arbeiter, wobey jeder Einzelne eine Kraft $= \frac{2}{3} G = 40$ ℔ (§. 152. 3.) anzuwenden hat, welches auch mit Herrn Bugge's Annahme zusammentrifft. S. phil. transact. 1779. Vol 69. P. I. pag. 124.

§. 183.

Die Voraussetzung, daß $P = M$ genommen werde, giebt:

$$p = b + \sqrt{[(f - b)^2 + \tfrac{1}{2}\lambda b H]},$$

wo b die Tiefe bedeutet, zu der der Pfeiler von der Oberfläche des Bodens durch sein eigenes Gewicht M herabsinkt (§. 180 und §. 177.). Es ist daher jedesmal vor dem ersten Schlage $f = b$; also nach demselben $p = b + \sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda b H}$, und wenn man die Tiefen des Pfeilers nach dem zweyten, dritten Schlage u. s. w. p', p'' u. s. w. nennt, so wird ferner:

$$p' = b + (p - b)\sqrt{(2 + \frac{p}{H})}$$

$$p'' = b + (p - b)\sqrt{(3 + \frac{p + p'}{H})}, \text{ u. s. w.}$$

weil bey jedem neuen Schlage der Fallblock auf den Pfeiler um so viel höher herabfällt, als letzterer bereits in den Boden eingesunken ist.

§. 184.

Aufgabe. Der Pfeiler sey in den Boden bis zu einer Tiefe f eingeschlagen, und werde nun mit einer Last

O beschwert; man sucht, wie tief er dadurch noch ferner einsinken werde?

Aufl. 1) Es sey, wie vorhin, b die Tiefe, zu der der Pfeiler von der Oberfläche des Bodens durch sein eigenes Gewicht M herabsinkt; eben dies bedeute B für das Gewicht M + O; so ist zuvörderst

$$b : B = M : M + O$$

$$\text{also } B = \left(\frac{M + O}{M}\right) b.$$

2) Ferner sey während des Einsinkens für irgend eine Tiefe x die Höhe, der seine Geschwindigkeit zugehört, = h, so hat man (§. 176. 4.)

$$b = C + x - \frac{x^2}{B},$$

weil das dortige b die Tiefe bezeichnet, worin die Last M + O vom Boden im Gleichgewichte gehalten wird, und folglich halb so groß als B ist.

3) Nun ist anfänglich $x = f$, und $h = o$; also wird $C = \frac{f^2}{B} - f$, mithin

$$h = x - f - \left(\frac{x^2 - f^2}{B}\right).$$

4) Es heiße p die gesuchte Tiefe, bey der der Pfeiler zu sinken aufhört, so ist für $x = p$ zum zweyten male $h = o$, folglich

$$B\ (p - f) = p^2 - f^2,$$

woraus man $p = B - f$ erhält.

5) Hierin für B seinen obigen Werth substituirt, giebt:

$$p = \frac{(M + O)\ b - Mf}{M}.$$

§. 185.

1) Begreiflich gilt diese Formel nur unter der Voraussetzung, daß $2f < B$, oder $O > (\frac{2f}{b} - 1) M$ sey. Widrigenfalls gäbe sie nemlich für p einen kleinern Werth als f, der aber weiter nichts anzeigt, als daß der Pfeiler schon so tief im Boden steckt, daß ihn die Last O nicht ferner mehr einzutreiben vermag, wenn sie ihm bloß aufgelegt wird, und nicht von einer Höhe auf ihn herabfällt. In allen den Fällen also, wo $O < (\frac{2f}{b} - 1) M$, ist $p = f$, oder der Pfeiler ist vor dem fernern Einsinken gesichert.

2) Um die Tiefe f zu finden, zu der der Pfeiler wenigstens eingeschlagen werden mußte, damit man ihm eine gegebene Last O ohne die Gefahr, daß er durch sie weiter einsinke, zu tragen geben könne, darf man nur $p = f$ setzen. Dies giebt:

$$Mf = (M + O) b - Mf, \text{ woraus}$$
$$f = \frac{(M + O) b}{2M} \text{ wird.}$$

Vom Einsinken pyramidalischer und anderer Körper.

§. 186.

Fig. 21. **Aufgabe.** Die Tiefe zu finden, zu welcher eine gegebene Pyramide, deren Gewicht $= M$ ist, in einen Boden von bestimmter Beschaffenheit eingesenkt werden muß, damit sie von ihm getragen werde.

Aufl.

Aufl. 1) Es sey die Höhe der Pyramide $CD = h$, ihre Grundfläche $AB = B$, die gesuchte Tiefe CQ ihrer Spitze C unter der Oberfläche des Bodens $HOI = p$, ein unbestimmter Theil derselben $CP = z$, der durch P gehende Querschnitt $MN = S$, so ist zuvörderst $B : S = h^2 : z^2$, also

$$S = \frac{Bz^2}{h^2}.$$

2) Man setze nun, ein Prisma, dessen Grundfläche $= c^2$, Gewicht $= G$ ist, werde vom Boden in einer Tiefe $= f$ getragen; für ein anderes Prisma seyen eben diese Größen der Reihe nach w^2, P, u; so hatten wir (§. 174.):

$$f : u = \frac{G}{c^2} : \frac{P}{w^2}, \text{ oder}$$

$$c^2 f : w^2 u = G : P \text{ . d. i.}$$

der vertikale Widerstand des Bodens verhält sich wie das Produkt aus dem horizontalen Flächenstücke desselben, das die Last unterstützt, in dessen Tiefe unter der Oberfläche.

3) Hiernach leidet also das Pyramidenstück zwischen den beyden unendlich nahen Querschnitten MN und mn, da es von einem Erdringe $= dS$ in einer Tiefe $PO = p - z$ getragen wird, den vertikalen Widerstand

$$d\Pi = \frac{G(p-z)\,dS}{c^2 f} = \frac{2GB(p-z)\,zdz}{c^2 h^2 f},$$

wovon das Integral $\Pi = \frac{GB}{c^2 h^2 f} \cdot (pz^2 - \frac{2}{3} z^3)$ ist.

4) Darin $z = p$ gesetzt, giebt den gesammten vertikalen Widerstand des Bodens gegen die Pyramide $= \frac{GBp^3}{2c^2h^2f}$. Weil nun dieser ihr Gewicht M aufheben muß, wofern sie nicht tiefer einsinken soll, so erhält man

$$M = \frac{GBp^3}{3c^2h^2f}, \text{ folglich}$$

$$p = \sqrt[3]{\left[\frac{3Mc^2h^2f}{GB}\right]}.$$

§. 187.

Es sey für das Gewicht G eben derselben Pyramide $p = b$, so wird:

$$b = \sqrt[3]{\left(\frac{3c^2h^2f}{B}\right)}, \text{ also}$$

$$p = b \left(\frac{M}{G}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ oder}$$

$$b : p = G^{\frac{1}{3}} : M^{\frac{1}{3}}, \text{ d. i.}$$

die Tiefe, worin eine Pyramide von gegebener Form vom Boden im Gleichgewichte gehalten wird, verhält sich, wie die Kubikwurzel aus ihrem Gewichte.

§. 188.

Aufgabe. Wenn die Pyramide mit ihrer Spitze die Oberfläche des Bodens berührt, gehöre ihre Geschwindigkeit der Höhe H zu. Ihr Gewicht sey $= G$; die Tiefe, in der sie vom Boden getragen wird, $= b$; man sucht, wie tief sie in denselben eindringen werde.

Aufl. 1) Man setze die Kraft, wodurch sie getrieben wird, wenn sie bereits zu einer Tiefe x gelangt ist, $= P$; die Höhe, der ihre Geschwindigkeit an dieser Stelle zugehört, $= h$; so hat man:

$$Gdh = Pdx.$$

2) Wird nun die Kraft P gegen die Richtung der Bewegung auf ihren Schwerpunkt angebracht, so muß zwischen den dreyen Kräften G, P und dem Widerstande des Bodens Gleichgewicht entstehen, d. h. die Pyramide muß bey dem Gewichte $G = P$ in der Tiefe x von dem Boden getragen werden; es wird daher:

$$b : x = G^{\frac{1}{3}} : (G - P)^{\frac{1}{3}},$$

oder $G - P = \frac{Gx^3}{b^3}$, woraus man

$$P = G\left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right) \text{ erhält.}$$

3) Dies in obiger Gleichung für P substituirt, giebt:

$$dh = \left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right) dx$$

also $h = C + x - \frac{x^4}{4b^3}$.

4) Zu Anfange war $x = 0$, und $h = H$, also wird $C = H$, mithin:

$$h = H + x - \frac{x^4}{4b^3}.$$

5) Es sey endlich p die größte Tiefe des Einsinkens, so ist für $x = p$, $h = 0$; daher bekommt man für diese folgende Gleichung:

$$p^4 - 4b^3p = 4b^3H.$$

6) Fällt die Pyramide von der Oberfläche des

Bodens aus der Ruhe herab, so ist $H = 0$, also $p = b\sqrt[3]{4} = 1{,}5874\,b$.

§. 189.

Wir wollen setzen, der pyramidenförmige Keil befinde sich Anfangs schon in einer Tiefe des Bodens $= f$, und bekomme nun daselbst eine der Höhe H zugehörige Geschwindigkeit; so ist in der allgemeinen Gleichung (3):

$$h = C + x - \frac{x^4}{4b^3},$$

für $x = f$, $h = H$, folglich:

$$H = C + f - \frac{f^4}{4b^3}, \text{ oder}$$

$$C = H - f + \frac{f^4}{4b^3}.$$

Dies für C substituirt, giebt:

$$4b^3h = f^4 + 4b^3(H - f) + 4b^3x - x^4.$$

Heißt nun, wie vorhin, p die Tiefe, zu der die Spitze des Keiles nach dem gänzlichen Verluste seiner Bewegung gelangt, so erhält man für diese die Gleichung:

$$p^4 - 4b^3p = f^4 + 4b^3(H - f).$$

§. 190.

Die der Höhe H zugehörige Geschwindigkeit kann dem Keile in jeder Tiefe durch den Stoß mitgetheilt werden, indem man auf seinen Rücken ein Gewicht von einer beliebigen Höhe herabfallen läßt; also lassen sich bey ihm, eben so wie beym Prisma, die Tiefen bestimmen, zu denen derselbe durch mehrere aufeinander folgende gleich starke Schläge nach und nach einsinken muß.

Es sey vor dem ersten Schlage $f = h\sqrt[3]{4}$, oder das Gewicht sey ihm Anfangs bloß aufgelegt, und mit ihm von der Oberfläche des Bodens herabgesunken, so wird nach demselben: $p^4 - f^3p = f^3H$. Hieraus erhält man für seine Tiefe $p^{(2)}$ nach dem zweyten Schlage:

$$p^{(2)4} - f^3p^{(2)} = p^4 + f^3(H - p) = 2f^3H;$$

nach dem dritten

$$p^{(3)4} - f^3p^{(3)} = p^{(2)4} + f^3(H - p^{(2)}) = 3f^3H;$$

und allgemein, für seine Tiefe $p^{(n)}$ nach dem nten Schlage:

$$p^{(n)4} - f^3p^{(n)} = nf^3H = n(p^4 - f^3p).$$

Hat man also die Tiefe des Keiles p, zu der ihn der erste Schlag eintreibt, gemessen, so kann man daraus leicht die folgenden Tiefen durch Auflösung der biquadratischen Gleichung herleiten.

Zur Erläuterung dieser Formel, und zugleich zum Beweise für die Richtigkeit derselben mögen folgende von **Lambert** angestellte Versuche dienen:

Er ließ eine Pyramide aus Holz von 2 Zoll Höhe, und einer rechtwinklichten Basis von 7''' Länge und $4\frac{5}{7}$''' Breite verfertigen. Sie wurde mit dem vorigen Hammer beschwert, und sank damit in den Sand bis zu einer Tiefe von $8\frac{1}{2}$''' herab. Das Eindringen nach dem ersten Schlage betrug ferner $4\frac{1}{2}$'''; also war $f = 8\frac{1}{2}$, $p = 13$, $p^4 - f^3p = 20577\frac{3}{8}$, welches für die Tiefe $p^{(n)}$ nach dem nten Schlage folgende Gleichung giebt:

$$p^{(n)4} - 614\tfrac{1}{8}\,p^{(n)} = 20577\tfrac{3}{8} \cdot n.$$

Hieraus bekommt man für

$n =$ 1	2	3	4	6
$p^{n} =$ 13,00	14,98	16,38	17,46	19,18

die beobachteten Tiefen waren dagegen

$p^{(n)} =$ 13	15	16	$17\frac{1}{2}$	19

die offenbar von den berechneten nur um sehr geringe Unterschiede abweichen.

§. 191.

Fig. 22. **Aufgabe** Von einem cylindrischen Körper ist das Gewicht $= M$, der Halbmesser seines Querschnittes $CB = a$, und seine Länge $= b$ gegeben; man fragt, wie tief derselbe in einen Boden von bestimmter Festigkeit horizontal (so daß nemlich seine Axe der Oberfläche des Bodens parallel bleibt) eingelegt werden müsse, damit er von ihm im Gleichgewichte gehalten werde.

Aufl. 1) Man setze die gesuchte Tiefe $BD = p$; einen unbestimmten Theil derselben $BP = x$; die dazu gehörige Ordinate $PM = y$; ferner sey, wie im §. 186. 2) das Gewicht eines Prisma's, das bey einer Grundfläche $= c^2$ in einer Tiefe des Bodens $= f$ ruhen bleibt, $= G$: so leidet das Element Mm der Cylinderfläche, da es von einem Erdstreife $= bdy$ in der Tiefe $PD = p - x$ getragen wird, den vertikalen Widerstand:

$$d\Pi = \frac{Gb(p-x)dy}{c^2 f}$$

2) Wofern man nun annimmt, daß die ganze Tiefe BD gegen den Halbmesser BC nur gering ist, so

kann in der Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$ ohne Nachtheil das letztere Glied x^2 weggelassen, und bloß $y^2 = 2ax$ gesetzt werden. Dadurch wird $x = \frac{y^2}{2a}$, also

$$d\Pi = \frac{Gb\,(2ap - y^2)\,dy}{2ac^2f}.$$

und folglich der Widerstand, den der Boden gegen das zwischen B und M liegende Flächenstück ausübt:

$$\Pi = \frac{Gb\,(2ap - \frac{1}{3}y^2)\,y}{2ac^2f}.$$

3) Hierin $x = p$, oder $y = \sqrt{2ap}$ gesetzt, giebt den Widerstand auf die halbe Fläche des eingesenkten Theiles $= \frac{2Gbp\sqrt{2ap}}{3c^2f}$, wovon das Doppelte dem Gewichte des Cylinders gleich seyn muß. Man erhält also:

$$\frac{4Gbp\sqrt{2ap}}{3c^2f} = M$$

woraus $p = \sqrt[3]{\left(\frac{9M^2c^4f^2}{32G^2b^2a}\right)}$ wird.

4) Für einerley Boden ist $\frac{c^2f}{G}$ ein unveränderlicher Quotient; daher verhält sich bey dieser Voraussetzung p direkt, wie $M^{\frac{2}{3}}$, und verkehrt, wie $\sqrt[3]{b^2a}$.

§. 192.

Hieraus läßt sich ferner die Tiefe, zu welcher der Cylinder von der Oberfläche des Bodens aus der Ruhe herabsinken muß, auf folgende Art bestimmen:

Man nehme die Größen x, h und P hier wieder in eben der Bedeutung, wie im §. 176.; so hat man nach vorhergehendem Satze (4) die Proportion:

$$p : x = M^{\frac{2}{3}} : (M - P)^{\frac{3}{2}},$$

woraus $P = M\left[1 - \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$ folgt.

Dies für P in die Gleichung $Mdh = Pdx$ gesetzt, giebt

$$dh = \left[1 - \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\right] dx,$$

also $h = x - \frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{x^5}{p^3}\right)}$,

wozu hier keine Konstante addirt wird, weil für $x = 0$, auch $h = 0$ seyn soll. Nennt man nun die gesuchte größte Tiefe das Einsinkens $= g$, so ist für $x = q$, zum zweytenmale $h = 0$; also erhält man dafür die Gleichung:

$$0 = q - \frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{q^5}{p^3}\right)},$$

mithin $q = p\sqrt[3]{\frac{25}{4}}$, oder $= \sqrt[3]{\left(\frac{225M^2c^4f^2}{128G^2b^2a}\right)}$.

§. 193.

Man setze, der Cylinder werde in dieser eingesenkten Lage, die er durch sein eigenes Gewicht M bekommen hat, nach horizontaler Richtung, oder parallel mit der Oberfläche des Bodens EF fortgezogen, so ist klar

1) daß seine Tiefe in demselben unverändert dieselbe, also stets $= q$ bleiben müsse, weil diese allein von seinem Gewichte abhängt, das aber durch dtn gedachten Zug weder vermehrt noch vermindert wird;

2) daß, wenn seine Bewegung bereits gleichför-

mig geworden ist, zur Unterhaltung derselben nicht mehr Kraft erfordert werde, als zur Ueberwindung des Widerstandes nöthig ist, den ihm der Boden nach der horizontalen Richtung entgegen setzt.

Um nun diesen Widerstand, den wir R nennen wollen, in Rechnung zu bringen, nehme man in §. 191. $BD = q$, und zerlege den vertikalen Druck $d\Pi = \frac{Gb\,(2aq - y^2)\,dy}{2ac^2f}$, der auf das Element Mm kommt, in einen längs dem Halbmesser $MC = d\Pi \operatorname{Cos} BCM$ $d\Pi\,(1 - \frac{x}{a})$, und in einen darauf senkrechten nach der Tangente an $M = d\Pi \operatorname{Sin} BCM$.

Ersterer, der hier nur allein wirksam ist, geht durch C, den Schwerpunkt des Cylinders nach der Richtung Cw, und zerfällt noch daselbst in einen Theil nach der Vertikale Cv, und in einen nach der Horizontale Cu. Letzterer ist

$$dR = d\Pi\,(1 - \frac{x}{a}) \operatorname{Sin} vCw = d\Pi\,(1 - \frac{x}{a}) \cdot \frac{y}{a}$$

$$= \frac{Gb}{2a^2c^2f}\,(2aqy - y^3)\,(1 - \frac{y^2}{2a^2})\,dy,$$

wovon das Integral

$$R = \frac{Gb}{2a^2c^2f}\,[aqy^2 - \tfrac{1}{4}y^4\,(1 + \frac{q}{a}) + \frac{y^6}{12a^2}] \text{ ist.}$$

Hierin $x = q$, oder $y^2 = 2aq$ gesetzt, giebt endlich den gesammten horizontalen Widerstand, den der Cylinder beym Fortrollen leidet:

$$K = \frac{Gb}{2a^2c^2f}(a^2q^2 - \tfrac{1}{3}aq^3) = \frac{Gbq^2}{2ac^2f}(a - \tfrac{1}{3}q)$$

oder, wenn man den beständigen Faktor $\frac{G}{c^2f} = \lambda$ nennt,

$$R = \frac{\lambda bq^2}{2a}(a - \tfrac{1}{3}q), \text{ worin}$$

$$q = \sqrt[3]{\left(\frac{225\,M^2}{128\,\lambda^2 b^2 a}\right)} \text{ ist (§. 192.).}$$

Da in den meisten Fällen $\frac{1}{3}q$ gegen a nur gering ist, so folgt, daß sich der Widerstand beynahe wie bq^2, d. i. direkt wie $M^{\frac{4}{3}}$, und verkehrt wie $\sqrt[3]{a^2b}$ verhalte.

§. 194.

Man sieht ohne mein Erinnern leicht, daß sich hiervon eine Anwendung auf die Berechnung des Widerstandes machen lasse, der bey Fuhrwerken jeder Art überwunden werden muß, sobald das Rad in den Boden einsinkt.

Ein anderes Verfahren, dieses Hinderniß zu bestimmen, dessen sich Herr Prof. Suß in seiner Abhandlung über das Fuhrwesen *) bedient, gründet sich darauf, daß man die Erde als eine vollkommen flüßige Substanz ansehen könne, was sich doch aber gewiß nur beyläufig, in Ermangelung sicherer Voraussetzungen annehmen läßt. Da in seiner Formel Winkel vorkommen, die vorher erst besonders berechnet werden müssen, so kann ich nicht allgemein angeben, in wie fern sie von

*) Versuch einer Theorie des Widerstandes zwey und vierrädriger Fuhrwerke auf Fahrwegen jeder Art. Kopenhagen 1798.

der meinigen abweicht; ich schränke mich daher bloß auf folgendes von ihm gegebene Exempel ein:

In feuchtem grobkörnigen Sande trat eine eiserne Stange von 5 ℔ Gewicht, und 1 Quadratzoll Basis in einer Tiefe von $\frac{5}{12}$ Zoll mit demselben ins Gleichgewicht; dies giebt also $\lambda = \frac{G}{c^2 f} = 12$. Nun sey der Theil, der von der ganzen Last des Wagens auf ein einzelnes Rad kommt, = 450 ℔; das Gewicht des Rades selbst = 84 ℔, also M = 534 ℔; ferner der Halbmesser des Rades $a = 15\frac{3}{4}''$, seine Breite $b = 3''$; so erhält man $\log q = 0{,}4633899$, $q = 2{,}90663''$, $a - \frac{1}{3}q = 14{,}78112$

$$\log\left(a - \tfrac{1}{3}q\right) = 1{,}1697074$$
$$\log \frac{\lambda b q^2}{2a} = 0{,}9847718$$
$$\log R = 2{,}1544792$$
$$R = 142{,}718 \text{ ℔}.$$

Nach Herrn Fuß Rechnung beträgt R = 136,878 ℔; so daß also in diesem Falle dessen Formel mit der meinigen ziemlich gut übereiastimmt.

Achtes Kapitel.

Von der Umdrehung der Körper um feste Axen.

---

§. 195.

Wenn bey der Bewegung eines festen Körpers zwey seiner Punkte A und B in Ruhe bleiben, so gilt dies auch von allen übrigen Punkten desselben, die in der geraden Linie AB liegen: denn es kann keiner dieser Punkte seinen Ort so verändern, daß er dabey sowohl von A als B seine vorige Entfernung behielte, wie doch nach dem Begriffe der Festigkeit des Körpers durchaus erforderlich ist.

Eine solche Linie AB nennt man eine **feste Axe** des Körpers, und die Bewegung desselben, seine **Umdrehung** um diese Axe.

§. 196.

Indem der Körper sich um die feste Axe AB dreht, bewegt sich

Fig. 23. I. jeder seiner Punkte F in einer auf AB senkrechten Ebene FCf, und beschreibt darin um den Punkt C, worin die Axe von gedachter Ebene geschnitten wird, einen Kreis.

II. Während der Punkt F durch den Bogen Ff fortrückt, durchläuft jeder andere Punkt des Körpers Z ein ähnliches Bogenstück Zz; dem nemlich ein eben so großer Winkel $ZOz = FCf$ an seinem Mittelpunkte O zugehört.

Beweis I. Es sey f der Ort, wohin der Punkt F nach Verlauf einer beliebigen Zeit gelangt ist. Man fälle aus F auf die Axe AB das Perpendikel FC, und ziehe die Linie Cf, so ist, vermöge der Festigkeit des Körpers, und wegen der unveränderlichen Lage, worin A und C während der Bewegung des Punktes F geblieben sind, $fA = FA$, und $fC = FC$; also sind die Dreyecke AfC und AFC kongruent, und es ist folglich auch $ACf = 90^\circ$, mithin die Ebene FCf auf AC senkrecht.

II. Indem F und Ff fortrückt, beschreibt auch der Punkt Z einen Bogen Zz, der in einer, ebenfalls auf AB senkrechten, Ebene ZOI liegt. Man lasse diese von der Ebene FCB in OI schneiden, so ist auch OI auf AB senkrecht, also mit CF parallel, und wenn man daher $OI = CF$ macht, läuft auch FI mit CO parallel, und ist $= CO$, oder $=$ dem senkrechten Abstande der beyden parallelen Ebenen FCf und IOZ, den wir $= p$ nennen wollen.

Nun habe während der Zeit, da F in f kommt, I den Weg Ii gemacht, so ist der jetzige Abstand fi der beyden Punkte f und i noch $=$ dem vorigen $FI = p$; also fi auf IOZ gleichfalls senkrecht, und folglich mit CO parallel. Demnach liegen Cf und Oi in einer Ebene, und sind wegen der rechten Winkel, die sie beyde mit CO machen, ebenfalls parallel; woraus zuvörderst die Gleichheit der Winkel FCf und IOi folgt.

Ferner ist in den Dreyecken ZOI und zOi, $IO =$

io, ZO = zO, und ZI = zi, also der Winkel zOi = ZOI; hierzu beyderseits noch den Winkel Zoi addirt, giebt endlich ZOz = IOi = FCf.

§. 197.

1. Wenn daher einer der Punkte im Körper, z. B. F, sich gleichförmig in seinem Kreise bewegt, so gilt solches auch von jedem andern Punkte Z desselben: denn alsdann ist der Bogen Ff, und mit ihm der dazu gehörige Winkel FCf, der Zeit proportional, worin er zurückgelegt wird; folglich auch, da FCf = ZOz ist, der Bogen Zz, den der Punkt Z beschreibt.

2. Man sagt in diesem Falle vom ganzen Körper, er drehe sich um seine Axe AB **gleichförmig** und nennt den Winkel, der von jedem Radius, wie FC und ZO, in einer Sekunde beschrieben wird, oder auch den dazu gehörigen Bogen für den Halbmesser = 1, die **Winkelgeschwindigkeit** dieser gleichförmigen Umdrehung.

3. Es sey diese = γ; die Geschwindigkeit des Punktes F in seiner Bahn, oder der Raum, den derselbe in einer Sekunde durchläuft, = c; die des Punktes Z = u; so ist c = γ . FC, und u = γ . ZO; also c : u = FC : ZO. d. h. die Geschwindigkeiten zweyer Punkte des Körpers in ihren Kreisbahnen verhalten sich, wie ihre senkrechten Entfernungen von der Umdrehungsaxe.

4. Wir haben §. 60. gesehen, daß ein materieller Punkt, der in einem Kreise, oder irgend einer andern vorgeschriebenen Kurve sich bewegt, seine Geschwindig-

keit in derselben ohne Einwirkung einer Kraft nicht ändere. Hieraus folgt offenbar, daß eben dies Gesetz der Trägheit auch bey der Umdrehung eines Körpers, oder ganzen Systems solcher einzelnen Theilchen um eine feste Axe statt finden müsse; daß nemlich der Körper so lange fortfahre, mit der einmal erhaltenen Winkelgeschwindigkeit sich gleichförmig um die Axe zu drehen, bis durch irgend eine Kraft die Umdrehung beschleunigt oder verzögert wird.

§. 198.

Wenn der Winkel $FCf = \varphi$, um den sich der Körper in einer gegebenen Zeit t gedrehet hat, dieser Zeit nicht proportional, sondern irgend eine zusammengesetztere Funktion davon ist, so heißt die Umdrehung des Körpers ungleichförmig. Seine Winkelgeschwindigkeit ist alsdann eine veränderliche Größe, die aus dem Gesetze, nach welchem φ von t abhängt, auf folgende Art bestimmt wird.

1) Man nenne den Bogen, den der Punkt F während der Zeit t beschrieben hat, $= s$, seine Geschwindigkeit zu Ende derselben $= v$, den Halbmesser des Kreises, worin er sich bewegt, $FC = f$, so hat man (§. 58. II.) $v = \frac{ds}{dt}$; ferner $s = f\varphi$, also $\frac{ds}{dt} = f \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, und folglich $v = f \cdot \frac{d\varphi}{dt}$.

2) Und wenn z, u, r eben diese Stücke für den Punkt Z bedeuten, so ist $u = \frac{dz}{dt}$, $z = r\varphi$, $\frac{dz}{dt} = r$.

$\frac{d\varphi}{dt} = u$; mithin $v : u = f : r$. Daher verhalten sich auch noch bey ungleichförmiger Umdrehung des Körpers die gleichzeitigen Geschwindigkeiten einzelner Punkte in ihm, wie die Halbmesser ihrer Kreisbahnen.

3) Nennt man demnach für eben den Zeitpunkt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, oder die Umlaufsgeschwindigkeit eines seiner Punkte, der sich in der Entfernung $= 1$ von der Axe AB befindet, $= \gamma$, so wird

$$1 : r = \gamma : u, \text{ folglich}$$
$$\gamma = \frac{u}{r} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

§. 199.

Aufgabe. Ein Körper von gegebener Form und Masse $= M$ sey um die feste Axe AB beweglich. Auf einen seiner Punkte F wirke fortdauernd eine Kraft V in der Umdrehungsebene dieses Punktes senkrecht auf seine Entfernung $FC = f$ von der Axe. Man sucht die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, nachdem seine Umdrehung eine gegebene Zeit t hindurch von der Kraft beschleunigt ist.

Aufl 1) Es sey diese für die angenommene Zeit $= \gamma$, die Aenderung, die sie durch die Kraft V im nächsten Zeittheilchen dt leidet, $= d\gamma$; ferner sey für eben die Zeit die Geschwindigkeit eines Theilchens dM der ganzen Masse M, das bey Z in der Entfernung $ZO = r$ von der Axe liegt, $= v$, so ist (§. 198. 3.) $v = r\gamma$, und folglich $dv = r d\gamma$.

2) Man

2) Man setze, diese Aenderung in der Geschwindigkeit des Elementes dM hervorzubringen, sey eine Kraft $= p$, senkrecht auf ZO, oder nach der Tangente des Bogens, den der Punkt Z in dem Zeittheile dt beschreibt, erforderlich, so wird (§. 62. 3.) $\frac{dv}{dt} = \frac{2gp}{dM}$,

also $p = \frac{dM}{2g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{rdM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und das Moment ~~die~~

dieser Kraft gegen die Axe $AB = pr = \frac{r^2 dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

3) Wenn nun zu gleicher Zeit auf jedes andere Theilchen dM des Körpers eine solche Kraft p wirkte, so würde eines jeden Geschwindigkeit v eben die Aenderung $dv = rd\gamma$ leiden, als dadurch wirklich geschieht, daß der ganze Körper seine Winkelgeschwindigkeit aus γ in $\gamma + d\gamma$ umändert. Daher sind diese Elementarkräfte in Verbindung der Kraft V während des Zeittheils dt äquipollent, und müssen also, auf die ihnen zugehörigen Stellen nach entgegengesetzter Richtung angebracht, der Kraft V an der Axe AB das Gleichgewicht halten.

4) Dem zufolge muß die Summe ihrer einzelnen Momente, oder das Integral $\int \frac{r^2 dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, durch den ganzen Körper genommen, dem Momente Vf der Kraft V gleich seyn.

Da nun für den gegebenen Zeitpunkt der Werth von γ bestimmt, also $\frac{d\gamma}{dt}$ in dem Differenzialausdrucke ein unveränderlicher Faktor ist, so erhält man

$$Vf = \frac{d\gamma}{2gdt} \cdot \int r^2 dM, \text{ und daraus}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gfV}{\int r^2 dM},$$

für die Zunahme $d\gamma$ der Winkelgeschwindigkeit des Körpers, die in jedem Zeittheile dt durch die Kraft V hervorgebracht wird.

Vom Momente der Trägheit.

§. 200.

Das Integral $\int r^2 dM$, oder die Summe von den Produkten aller Elemente des Körpers in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe AB, hat für jeden gegebenen Körper, der sich um eine bestimmte Axe dreht, einen unveränderlichen Werth, der zuvor berechnet werden muß, ehe man von der gefundenen Formel Gebrauch machen kann. Man nennt diese Größe **das Moment der Trägheit** des Körpers in Bezug auf seine Umdrehungsaxe.

Da dasselbe, als Summe von Größen der fünften Dimension, selbst diese Dimension haben muß, so ist begreiflich, daß man es unter der Form Mh^2 darstellen, oder als ein Produkt aus der ganzen Masse M des Körpers in das Quadrat einer bestimmten Entfernung h von der Axe betrachten könne, die nach vollendeter Integration sich leicht angeben läßt. Dies vorausgesetzt, wird:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gfV}{Mh^2}, \text{ also}$$

$$\delta = \gamma + \frac{2gf}{Mh^2}\int V dt,$$

und in dem Falle, wenn V unveränderlich ist:

$$\delta = \gamma + \frac{2gfVt}{Mh^2};$$

in welchen beyden Formeln der beständige Theil γ die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

§. 201.

Fig. 5. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines gleichartigen Körpers, der von einer stetigen Oberfläche begrenzt wird, in Beziehung auf irgend eine, durch ihn gehende, Axe OA zu bestimmen.

Aufl. 1) Man lege durch diese Axe, in der man irgend einen Punkt O zum Anfangspunkte der Abscissen angenommen hat, nach Gefallen eine Ebene BOA, fälle darauf aus einem beliebigen Punkte m des Körpers das Perpendikel mq, und aus q auf die Axe noch ein zweytes qp; so daß die Lage des Punktes m durch die drey rechtwinklichten Koordinaten $Op = x$, $pq = y$, und $qm = z$ bestimmt wird.

2) Man lasse diese Koordinaten um willkührliche Differenziale $pp' = dx$, $oq' = dy$, $rm' = dz$ wachsen, wodurch der Endpunkt der letztern Ordinate qm aus m an einen andern, unendlich nahe liegenden, Ort m' versetzt werden mag.

3) Zwischen den beyden Punkten m und m' ergänze man das rechtwinklichte Parallelepipedum mm', indem man durch m drey, den Koordinaten parallele,

Linien zieht, und auf diesen die Stücke dx, dy, dz abnimmt; so ist der Inhalt von dessen Grundfläche $= dxdy$, und seine Höhe $= dz$; also sein körperlicher Inhalt $= dxdydz$, und wenn man die Dichte des Körpers $= \varkappa$ setzt, seine Masse $dM = \varkappa dxdydz$.

4) Dabey ist seine Entfernung mp von der Axe, die (§. 199. 1.) r genannt wurde, $= \sqrt{(y^2 + z^2)}$; also das Produkt

$$r^2 dM = (y^2 + z^2) dM = \varkappa dzdydz (y^2 + z^2).$$

5) Dies Produkt von allen Elementen des Körpers, die längs mq liegen, zusammengenommen, oder solchergestalt integrirt, daß dabey nur z als veränderlich angesehen wird, giebt das Moment der Trägheit der ganzen Säule, die bey eben der Grundfläche des zuvor betrachteten Parallelepipedums (3) die Höhe $mq = z$ hat, $= \varkappa dxdy (y^2 z + \frac{1}{3} z^3)$.

6) Das Differenzial $(y^2 + z^2) dM$ ist jederzeit positiv, und vergrößert folglich sein Integral, auch wenn die Ordinate mq unterhalb q fortgesetzt wird. Um also letzteres vollständig zu haben, muß darin z beyden Theilen der ganzen Ordinate, die von q bis zur Oberfläche gehen, gleich gesetzt, und was daraus entspringt, addirt werden.

7) Begreiflich können diese Werthe von z nur allein von x und y abhängen, und wenn man also den Ausdruck, worin sich $y^2 z + \frac{1}{3} z^3$ durch die Substitution verwandelt, $= Y$ setzt, so sind x und y die einzigen veränderlichen Größen, die in diesem Y noch vorkommen.

8) Man nehme nun ferner von $\varkappa dxdy . Y$, in-

dem man bloß y als veränderlich betrachtet, das Integral $= \varkappa dx \int Ydy$, und setze darin für y die beyden Theile der Ordinate pq, die auf verschiedenen Seiten der Axe von p aus bis zum Umfange der Ebene BOA hinlaufen.

9) Die beyden Werthe von $\int Ydy$, die hieraus entstehen, addire man, und nenne die Summe $= X$, so erhält man $\varkappa Xdx$ für das Moment der Trägheit von dem Schnitte des Körpers, der zwischen den beyden unendlich nahe liegenden parallelen Ebenen pqm, $p'q'm'$ enthalten ist.

10) Dies nochmals nach x integrirt, und dann $x =$ den beyden Theilen der ganzen Axe OA genommen, so weit dieselbe von O aus innerhalb dem Raume des Körpers nach entgegengesetzten Seiten fortläuft, und, was herauskommt, addirt, giebt endlich für diese Axe das verlangte Moment der Trägheit des ganzen Körpers.

§. 202.

Fig. 24. **Exempel I.** Der Körper sey ein rechtwinklichtes Parallelepipedum AI, und die eine Seitenlinie AB seiner Grundfläche CAB die Axe, wofür man sein Moment der Trägheit zu bestimmen sucht.

Man setze diese $= a$; die andere Seite AC der Grundfläche $= b$, die Höhe AD $= c$; so ist zuvörderst, wenn die Grundfläche zur Ebene der beyden Ordinaten x und y angenommen wird, der eine Werth von z, den man in $y^2z + \frac{1}{3}z^3$ zu substituiren hat, $= c$, der andere $= 0$; also:

$$Y = y^2c + \tfrac{1}{3}c^3, \text{ mithin}$$
$$\int Ydy = \tfrac{1}{3}y^3c + \tfrac{1}{3}c^3y.$$

Hierin $y = b$ gesetzt, erhält man ferner:

$$X = \tfrac{1}{3}b^3c + \tfrac{1}{3}c^3b,$$
$$\int Xdx = \tfrac{1}{3}x\,(b^3c + c^3b),$$

und folglich, wenn man $x = a$ nimmt, das Moment der Trägheit des Parallelepipedums gegen die Axe AB $= \tfrac{1}{3}\varkappa a\,(b^3c + c^3b) = \tfrac{1}{3}\varkappa abc\,(b^2 + c^2)$, oder durch seine Masse $M = \varkappa abc$ ausgedrückt, $= \tfrac{1}{3}M\,(b^2 + c^2) = \tfrac{1}{3}M \,.\, BI^2$.

§. 203.

Fig. 25. **Exempel II.** Das Moment der Trägheit eines geraden Prisma's AF, dessen Grundfläche ein rechtwinklichtes Dreyeck ACD ist, in Beziehung auf die Seitenlinie AB einer der spitzen Kanten zu finden.

Es sey die Länge der Axe AB, oder die Höhe des Prisma's, $= a$; der daranliegende Kathet AC der Grundfläche $= b$, der andere Kathet CD $= c$; ferner sey pol ein unbestimmter Querschnitt des Prisma's, parallel der Grundfläche, und in demselben mq senkrecht auf po, also auch senkrecht auf der Seitenfläche CAB, die wir zur Ebene der Koordinaten x und y annehmen wollen, so hat man:

$$pq : qm = po : ol,$$

oder, da $po = AC$, und $ol = CD$ ist:

$$y : z = b : c,$$

$$\text{also } z = \frac{cy}{b}.$$

Dieser Werth für Z in $y^2z + \frac{1}{3}z^3$ substituirt, giebt:

$$Y = \frac{cy^3}{b} + \frac{c^3y^3}{3b^3} = \frac{cy^3}{b}\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right),$$

$$\int Ydy = \frac{cy^4}{4b}\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right),$$

und darin $y = po = b$ gesetzt:

$$X = \frac{1}{4}cb^3\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right) = \frac{1}{4}bc\left(b^2 + \frac{1}{3}c^2\right).$$

Demnach wird $\int Xdx$, für $x = a$, $= \frac{1}{4}abc\left(b^2 + \frac{1}{3}c^2\right)$; mithin das Moment der Trägheit des Prisma's in Bezug auf die Seitenlinie $AB = \frac{1}{4}\varkappa abc\left(b^2 + \frac{1}{3}c^2\right)$, oder durch dessen Masse $M = \frac{1}{2}\varkappa abc$ ausgedrückt, $= \frac{1}{2}M\left(b^2 + \frac{1}{3}c^2\right)$.

§. 204.

1. Hieraus läßt sich leicht das Moment der Trägheit eines geraden Prisma's, dessen Grundfläche ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, wovon Höhe und Grundlinie b und c heißen mögen, in Ansehung derjenigen Seitenlinie bestimmen, die durch die Spitze der Grundfläche geht. Man setze nemlich dasselbe $= Mh^2$, und theile das Prisma mit einer durch die Axe gelegten Ebene in zwey andere, gleiche große Prismen, deren Grundflächen also rechtwinklichte Dreyecke sind; so ist das Moment der Trägheit eines jeden derselben gegen die gemeinschaftliche Axe $= \frac{1}{2}Mh^2$, die Masse $= \frac{1}{2}M$, der Kathet der Grundfläche, der an der Axe liegt, $= b$, der andere $= \frac{1}{2}c$; folglich, wenn man diese Größen für M, b und c in voriger Formel substituirt:

$$\tfrac{1}{2}Mh^2 = \tfrac{1}{4}M(b^2 + \tfrac{1}{12}c^2),$$
$$\text{also } Mh = \tfrac{1}{2}M(b^2 + \tfrac{1}{12}c^2).$$

2. Eben dies ist auch zugleich das Moment der Trägheit eines geraden vielseitigen Prisma's mit regulärer Grundfläche, wovon jede Seite $= c$, und ihr Abstand vom Mittelpunkte $= b$ ist, in Ansehung derjenigen Axe, die, parallel mit den Seitenlinien des Prisma's, durch dessen Schwerpunkt geht. Um aber die Formel für diesen Fall noch bequemer einzurichten, setze man die Anzahl der Seitenflächen $= n$, so ist der Winkel am Mittelpunkte der Grundfläche, der den einzelnen Seiten zugehört, $= \frac{360°}{n}$, also $b = \frac{1}{2}c \cdot \text{Cot}\,\frac{180°}{n}$; mithin das Moment der Trägheit des $n$seitigen Prisma's für die centrale Axe $= \frac{1}{24}Mc^2\left(1 + 3\,\text{Cot}^2\,\frac{180°}{n}\right)$.

§. 205.

Fig. 26. **Exempel III.** Es sey OABC eine dreyseitige Pyramide, wovon die eine Seitenlinie OA auf der Grundfläche ACB, die bey B rechtwinklicht ist, senkrecht steht; man sucht, in Bezug auf diese Seitenlinie, ihr Moment der Trägheit.

Man setze die Länge der Axe OA, oder die Höhe der Pyramide $= a$, den daran liegenden Katheten AB der Grundfläche $= b$, den gegenüber liegenden BC $= c$, und verfahre in der Konstruktion, wie vorhin beym Prisma, so erhält man dadurch für die Oberfläche der Pyramide die drey rechtwinklichten Koordinaten $Op = x$, $pq = y$, $qm = z$.

Nun ist zuvörderst wegen der Aehnlichkeit der Δpmq, pol, und ACB:

$$pq : qm = AB : BC, \text{ oder}$$
$$y : z = b : c, \text{ also}$$
$$z = \frac{cy}{b},$$

wodurch, wie zuvor $\int Ydy = \frac{cy^4}{4b}\left(1 + \frac{c^2}{3b^2}\right)$ wird.

Ferner ist $OA : Op = AB : po$, oder

$$a : x = b : po, \text{ also}$$
$$po = \frac{bx}{a},$$

und da dies der Werth ist, den man für y in $\int Ydy$ zu substituiren hat, so erhält man

$$X = \frac{bcx^4}{4a^4}\left(b^2 + \tfrac{1}{3}c^2\right)$$
$$\int Xdx = \frac{bcx^5}{20a^4}\left(b^2 + \tfrac{1}{3}c^2\right).$$

Darin endlich $x = a$ gesetzt, giebt das gesuchte Moment der Trägheit der Pyramide für die Axe $OA = \frac{1}{20}\varkappa abc\left(b^2 + \frac{1}{3}c^2\right)$, oder, mit Zuziehung seiner Masse $M = \frac{1}{6}\varkappa abc$, $= \frac{3}{10}M\left(b^2 + \frac{1}{3}c^2\right)$.

Hieraus ergiebt sich ferner, nach dem im §. 204. gezeigten Verfahren, das Moment der Trägheit einer $n$seitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wovon jede Seite $= c$ ist, in Ansehung ihrer geometrischen Axe $= \frac{1}{40}Mc^2\left(1 + 3\,\mathrm{Cot}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$.

§. 206.

Exempel IV. Das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders für einen Durchmesser seiner Grundfläche zu finden.

1) Es sey seine Höhe $= a$, der Halbmesser seiner Grundfläche, die wir zur Ebene der Koordinaten x und y annehmen wollen, $= b$, so ist für die Oberfläche $z = a$, mithin

$$y = y^2a + \tfrac{1}{3}a^3$$
$$\int Ydy = \tfrac{1}{3}y^3a + \tfrac{1}{3}a^3y.$$

2) Und wenn man den Anfangspunkt der Abscissen in den Mittelpunkt der Grundfläche setzt, und zuerst nur die Rechnung für den Quadranten anstellt, hat man für dessen Umfang $y^2 = b^2 - x^2$; unter welcher Bedeutung von y also

$$\int Xdx = \tfrac{1}{3}a\,(\int y^3dx + a^2\int ydx) \text{ wird.}$$

3) Nun ist nach der bekannten Formel $\int pdq = pq - \int qdp$, wenn man darin $p = y^3$ und $q = x$ setzt,

$$\int y^3dx = y^3x - 3\int xy^2dy,$$

oder, da $ydy = -xdx$,

$$\int y^3dx = y^3x + 3\int x^2ydx.$$

4) Ferner bekommt man auch, indem man bloß für y^2 seinen Werth $b^2 - x^2$ setzt,

$$\int y^3dx = b^2\int ydx - \int x^2ydx.$$

5) Letztere Gleichung durch 3 multiplicirt, und dann zu ersterer (3) addirt, giebt:

$$4\int y^3dx = y^3x + 3b^2\int ydx, \text{ also:}$$
$$\int Xdx = \tfrac{1}{3}a\,(\tfrac{1}{4}y^3x + (a^2 + \tfrac{3}{4}b^2)\int ydx),$$

dessen Werth für $x = b$, $= \frac{1}{12}\pi ab^2\,(a^2 + \frac{3}{4}b^2)$ ist.

weil alsdann der erste Theil verschwindet, und im letztern das Integral $\int y dx$ bekanntlich $= \frac{1}{4}\pi b^2$ wird.

6) Hiervon das Vierfache genommen, erhält man den Werth von $\int X dx$ für den ganzen Kreis $= \frac{1}{3}\pi a b^2 (a^2 + \frac{3}{4} b^2)$; also das Moment der Trägheit des Cylinders für den Durchmesser seiner Grundfläche $= \varkappa \int X dx = \pi \varkappa a b^2 (\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{4} b^2)$, oder durch seine Masse M $= \pi \varkappa a b^2$ ausgedrückt, $= M (\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{4} b^2)$.

§. 207.

Bey Körpern, deren Oberflächen durch Gleichungen vom zweyten, oder einen noch höhern Grade bestimmt werden, ist doch die Entwickelung des doppelten Integrals $\iint Y dx dy$ mit zu vielen Schwierigkeiten verknüpft, als daß man nicht lieber in solchen Fällen den allgemeinen Weg verlassen, und nach Beschaffenheit der Umstände besondere Hülfsmittel zur Vereinfachung des Kalkuls aufsuchen sollte, wie uns dergleichen z. B. die runden Körper darbieten. Ehe wir aber zu diesen übergehen, muß ich noch etwas über den merkwürdigen Zusammenhang zwischen den Momenten der Trägheit eines Körpers in Ansehung paralleler Axen sagen, worauf man durch die bisherige Methode folgendermaßen geleitet wird:

Fig. 27. 1) Es sey das Moment der Trägheit eines gegebenen Körpers, dessen Masse $= M$ ist, in Beziehung auf irgend eine Axe OA . . . . $= Mh^2$; in Ansehung einer andern ihr parallelen Axe oa $= Mh'^2$; die senkrechte Entfernung Oo zwischen beyden $= e$.

2) Man lege die Ebene BOA (§. 201. 1.) so, daß sie zugleich durch oa geht, und setze, wie dort, als Koordinaten eines beliebigen Punktes m im Körper: $Op = x$, $pq = y$, $qm = z$; so war zuvörderst (ebendas. 4.)

$$Mh^2 = \int (y^2 + z^2)\, dM,$$

wo $dM = \varkappa dx dy dz$ angenommen wurde.

3) Man verlängere ferner die Ordinate qp bis sie die andere Axe oa in π schneidet, und nenne als Koordinaten desselben Punktes m für diese letztere Axe: $o\pi = x'$, $\pi q = y'$, $qm = z'$, so erhält man auf gleiche Art:

$$Mh'^2 = \int (y'^2 + z'^2)\, dM,$$

und außerdem $x' = x$, $y' = y + e$, $z' = z$, also:

$$dx' = dx,\ dy' = dy,\ dz' = dz,$$

daher das Element dM hier eben die Bedeutung hat, wie vorhin (2.)

4) Durch die Substitution der beyden Werthe $y + e$ und z für y' und z' verwandelt sich nun das letztere Integral in folgendes:

$$Mh'^2 = \int [(y + e)^2 + z^2]\, dM = \int (y^2 + z^2)\, dM + 2e \int y dM + e^2 \int dM.$$

5) Von diesen dreyen Theilen ist der erstere $\int (y^2 + z^2)\, dM = Mh^2$ (2); ferner $\int dM$, durch den ganzen Körper genommen, $= M$, und wenn man aus dessen Schwerpunkte g die Koordinaten $gf = c$, $fe = b$, und $eo = a$ zieht, so hat man zu deren Bestimmung (Statik §. 74.) die Gleichungen:

$$a = \frac{\int x dM}{M},\ b = \frac{\int y dM}{M},\ c = \frac{\int z dM}{M},$$

mithin $\int y dM = bM$

6) Demnach wird endlich

$Mh'^2 = Mh^2 + 2ebM + e^2M = M(h^2 + 2be + e^2)$.

§. 208.

1. Man setze noch die Entfernung des Schwerpunktes g von der ersteren Axe $OA = D$, von der letztern $oa = d$, so ist

$$D^2 = ge^2 = ef^2 + fg^2 = b^2 + c^2,$$

und eben so: $d^2 = (b + e)^2 + c^2$, folglich

$$d^2 - D^2 = (b + e)^2 - b^2 = 2be + e^2,$$

wodurch $Mh'^2 = M(h^2 + d^2 - D^2)$ wird.

2. Es ist daher jedesmal $Mh'^2 > Mh^2$, wofern $d > D$ ist, d. h. je weiter die Axe des Körpers in paralleler Lage von seinem Schwerpunkte wegrückt, desto größer wird sein Moment der Trägheit für dieselbe. Am kleinsten ist es also, wenn die Axe in den Schwerpunkt hineinfällt.

3. Es sey jetzt OA eine solche durch den Schwerpunkt gehende Axe; das Moment der Trägheit für dieselbe $= Mh^2$, so ist hier $D = 0$, mithin

$$Mh'^2 = M(h^2 + d^2)$$

Weiß man demnach das Moment der Trägheit des Körpers für irgend eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe, so findet man daraus sein Moment der Trägheit für jede andere ihr parallele Axe, wenn man zu selbigem das Produkt Md^2 aus der Masse des Körpers in das Quadrat ihrer Entfernung vom Schwerpunkte hinzufügt.

§. 209.

Fig. 24. **Exempel** I. Es sey vom rechtwinklichten Parallelepipedum AI die eine Seite AB der Grundfläche $= a$, die andere $AC = b$, die Höhe $= c$, seine Masse $= M$; also sein Moment der Trägheit in Beziehung auf $AB = \frac{1}{3}M(b^2 + c^2)$ (§. 202.). Man ziehe durch seinen Schwerpunkt eine mit AB parallele Linie, die die Seitenfläche BI in G treffen mag, und setze sein Moment der Trägheit für diese $= Mh^2$; ferner sey noch GF auf BH senkrecht, so ist $BF = \frac{1}{2}b$, $GF = \frac{1}{2}c$, mithin $BG^2 = d^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2)$, und daher:

$$\tfrac{1}{3}M(b^2 + c^2) = M[h^2 + \tfrac{1}{4}(b^2 + c^2)],$$

$$h^2 = \tfrac{1}{12}(b^2 + c^2),$$

also das Moment der Trägheit des Parallepd. in Ansehung der durch seinen Schwerpunkt gehenden, mit AB parallelen, Axe $\frac{1}{12}M(b^2 + c^2) = \frac{1}{3}M \cdot BG^2$.

Und in Bezug auf die Axe EF, die, parallel mit AB, durch die Mitte der Grundfläche geht, $= M(h^2 + \frac{1}{4}c^2) = \frac{1}{3}M(c^2 + \frac{1}{4}b)$.

2. Für den Durchmesser der Grundfläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe $= a$, Halbmesser $= b$, war das Moment der Trägheit $M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2)$ (§. 206.). Man setze dasselbe für einen, durch seinen Schwerpunkt gehenden Durchmesser $= Mh^2$, so hat man

$$M(\tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2) = M(h^2 + \tfrac{1}{4}a^2), \text{ mithin}$$

$$Mh^2 = \tfrac{1}{4}M(b^2 + \tfrac{1}{3}a^2).$$

§. 210.

Fig. 6. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines runden Körpers, der durch Umdrehung einer ebenen Fi-

gur AMDB um ihre Axe AB entstanden ist, in Beziehung auf diese Axe zu bestimmen.

Aufl. 1) Es sey die Abscisse AP der Kurve AMD, wodurch die Figur ADB begrenzt wird, $= x$; die dazu gehörige Ordinate PM $= y$; das unendlich kleine Stück Pp der Axe, oder das Differenzial der Abscisse $= dx$; so ist der Inhalt von dem Segmente des Körpers, das zwischen den beyden durch P und p gehenden, auf AB senkrechten, Querschnitten liegt, $= \pi y^2 dx$, und wenn wir die Dichte des Körpers $= \varkappa$ setzen, seine Masse $= \pi \varkappa y^2 dx$.

2) Also die Masse des ganzen Körpers $M = \pi \varkappa \int y^2 dx$, worin $x =$ AB gesetzt werden muß.

3) Man theile noch ferner das eben betrachtete Segment (1) in lauter unendlich schmale und koncentrische Ringe, und setze den innern Halbmesser eines solchen Ringes, oder seine Entfernung von P, $= r$, seine Breite $= dr$; so ist dessen Masse $dM = 2\pi\varkappa r dr dx$, und da alle seine Theile einerley Entfernung von der Axe haben, sein Moment der Trägheit gegen dieselbe: $r^2 dM = 2\pi\varkappa r^3 dr dx$.

4) Hiervon das Integral nach r genommen, und darin $r = y$ gesetzt, giebt das Moment der Trägheit des gedachten Segmentes $= \frac{1}{2} \pi\varkappa y^4 dx$, und dieses nochmals nach x integrirt, das des ganzen Körpers $Mh^2 = \frac{1}{2} \pi\varkappa \int y^4 dx$, nachdem in diesem Integrale $x =$ der Länge der ganzen Axe AB genommen ist.

5) Substituirt man nun für M den vorhin erhal-

tenen Werth $\pi\varkappa\int y^2 dx$, und dividirt die Gleichung damit, so erhält man:

$$h^2 = \frac{\int y^4 dx}{2\int y^2 dx},$$

so daß das gesuchte Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axe AB, durch seine Masse M ausdrückt, $= \frac{M\int y^4 dx}{2\int y^2 dx}$ wird.

§. 211.

1. Beym geraden Cylinder ist y der Halbmesser eines Querschnittes, der von der Grundfläche um die Weite $= x$ entfernt liegt, und folglich mit dem Halbmesser der Grundfläche einerley. Setzt man also diesen $= b$, so wird

$$\int y^4 dx = b^4 x, \text{ und } \int y^2 dx = b^2 x,$$

mithin das Moment der Trägheit des geraden Cylinders in Ansehung seiner geometrischen Axe $= \frac{Mb^4 x}{2b^2 x} = \frac{1}{2} Mb^2$.

2. Beym geraden Kegel sey die Höhe $AB = a$, der Halbmesser der Grundfläche $BD = b$, so hat man:

$$x : y = a : b, \text{ oder } y = \frac{bx}{a},$$

folglich $\int y^4 dx = \frac{b^4 x^5}{5a^4}$, $\int y^2 dx = \frac{b^2 x^3}{3a^2}$,

und der Werth des Quotienten $\frac{\int y^4 dx}{\int y^2 dx}$, für $x = a$, $= \frac{3}{5} b^2$, also das Moment der Trägheit des Kegels in Beziehung auf seine geometrische Axe $= \frac{3}{10} Mb^2$.

3) Um

3) Um das Moment der Trägheit des abgekürzten Kegels für eben die Axe zu finden, setze man die Masse desselben $= M$; die des fehlenden Stückes, das ihn zum vollständigen Kegel ergänzen würde, $= F$; die des ganzen Kegels $= G$; außerdem sey der Halbmesser der obern Grundfläche $= c$, der untern $= b$; so ist

das Moment der Trägheit des obern

Kegels . . . . $= \frac{3}{10} Fc^2$

des ganzen $= \frac{3}{10} Gb^2$,

folglich das des abgekürzten Kegels $= \frac{3}{10} (Gb^2 - Fc^2)$

Ferner ist $M = G - F$, und $F = \frac{c^3}{b^3} . G$, also

$M = (1 - \frac{c^3}{b^3}) G$, und daher $G = \frac{b^3 M}{b^3 - c^3}$. Diese

Werthe für F und G nach einander in der vorhergehenden Formel substituirt, geben das gesuchte Moment der Trägheit des abgekürzten Kegels, durch seine Masse ausgedrückt, $= \frac{3}{10} M \left(\frac{b^5 - c^5}{b^3 - c^3}\right)$.

§. 212.

1. Für die Kugel, oder ein Segment derselben, ist AMD ein Bogen ihres größten Kreises; folglich, wenn man ihren Halbmesser $= a$ nennt, $y^2 = 2ax - x^2$. Dadurch wird $\int y^4 dx = \frac{4}{3} a^2 x^3 - ax^4 + \frac{1}{5} x^5$, $\int y^2 dx = ax^2 - \frac{1}{3} x^3$; mithin das Moment der Trägheit eines Kugelsegments von der Höhe $= x$, durch seine Masse bestimmt, $= \frac{M \int y^4 dx}{2 \int y^2 dx} = M . \frac{20 a^2 x - 15 ax^2 + 3 x^3}{30 a - 10 x}$.

2. Setzt man hierin $x = 2a$, so erhält man das Moment der Trägheit der ganzen Kugel in Bezug auf ihren Durchmesser $= \frac{2}{5} Ma^2$.

3. Von einem elliptischen Sphäroid sey die halbe Polaraxe $= a$, der Halbmesser des Aequators $= b$, die Masse, wie vorhin, $= M$. Man beschreibe über der gedachten Axe einen Halbkreis mit dem Halbmesser $= a$, und setze für die Abscisse $AP = x$, dessen Ordinate $= Y$, so hat man bekanntlich:

$$Y : y = a : b, \text{ oder } y = \frac{bY}{a}, \text{ also:}$$

$$\int y^4 dx = \frac{b^4}{a^4} \int Y^4 dx, \int y^2 dx = \frac{b^2}{a^2} \int Y^2 dx, \text{ und } \frac{\int y^4 dx}{2\int y^2 dx}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \frac{\int Y^4 dx}{2\int Y^2 dx}.$$

Da nun (1) $\frac{\int Y^4 dx}{2\int Y^2 dx} = \frac{2}{5} a^2$, so wird $\frac{\int y^4 dx}{2\int y^2 dx} = \frac{2}{5} b^2$, und folglich das Moment der Trägheit des Sphäroids in Bezug auf seine Polaraxe $= \frac{2}{5} Mb^2$.

§. 213.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit des runden Körpers für eine durch seinen Scheitel A auf die Axe AB senkrecht gezogene Linie zu finden.

Aufl. 1) Wenn man in der Formel (§. 209. 2.) statt M, b, a, hier $\pi \lambda y^2 dx$, y und dx setzt, so erhält man das Moment der Trägheit des cylindrischen Segmentes (§. 210. 1.) für den, durch seinen Schwerpunkt gehenden, mit gedachtem Perpendikel parallelen

Durchmesser $= \frac{1}{4}\pi\varkappa y^4 dx$; also wird dasselbe in Bezug auf das Perpendikel selbst, wovon sein Schwerpunkt um x entfernt liegt $= \pi\varkappa y^2 dx \left(\frac{1}{4}y^2 + x^2\right)$; mithin das Moment der Trägheit des ganzen Körpers für diese Axe $= \pi\varkappa \left(\frac{1}{4}\int y^4 dx + \int y^2 x^2 dx\right)$, oder durch seine Masse $M = \pi\varkappa\int y^2 dx$ ausgedrückt, $= \frac{1}{4} M \frac{\int y^4 dx}{\int y^2 dx} + M \cdot \frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$, worin nach geschehener Integration $x = AB$ gesetzt werden muß.

2) Der erste Theil hiervon ist die Hälfte von dem Moment der Trägheit des Körpers in Ansehung seiner geometrischen Axe; nennen wir also dies $= Mh^2$, so wird endlich sein Moment der Trägheit für die durch A gehende, auf AB senkrechte, Axe $= \frac{1}{2}Mh^2 + M \cdot \frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$.

§. 214.

1. Für den geraden Cylinder, dessen Höhe $= a$, Halbmesser der Grundfläche $= b$, ist $y = b$; daher $\int y^2 x^2 dx = \frac{1}{3} b^2 x^3$, $\int y^2 dx = b^2 x$, und der Werth des Quotienten $\frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$, für $x = a$, $= \frac{1}{3} a^2$. Ferner ist $h^2 = \frac{1}{2} b^2$, mithin das Moment der Trägheit des Cylinders für den Durchmesser seiner Grundfläche $= M \left(\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{3} a^2\right)$, wie im §. 206. schon gefunden ist.

2. Beym geraden Kegel, dessen Höhe ebenfalls $= a$, Halbmesser der Grundfläche $= b$, war $y = \frac{bx}{a}$;

also wird $\int y^2 x^2 dx = \frac{b^2 x^5}{5a^2}$, $\int y^2 dx = \frac{b^2 x^3}{3a^2}$; mithin der Werth von $\frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$, für $x = a$, $= \frac{3}{5}a^2$, und da hier $h^2 = \frac{3}{10} b^2$ ist, das Moment der Trägheit des Kegels für eine, durch dessen Spitze auf seine centrale Axe senkrecht gezogene, Linie $= \frac{3}{5} M (a^2 + \frac{1}{4} b^2)$.

3. Da der Schwerpunkt des Kegels von der Spitze um $\frac{3}{4}a$ entfernt liegt, so erhält man ferner sein Moment der Trägheit für eine durch den Schwerpunkt gehende, auf AB senkrechte, Axe $= \frac{3}{5} M (a^2 + \frac{1}{4} b^2) - \frac{9}{16} Ma^2$ $= \frac{3}{20} M (b^2 + \frac{1}{4} a^2)$.

4. Beym elliptischen Sphäroid (§. 212. 3.) ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ also $\int y^2 x^2 dx = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{2}ax^4 - \frac{1}{5}x^5)$, $\int y^2 dx = \frac{b^2}{a^2}(ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$, folglich $\frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$ $= \frac{(15a - bx)x^2}{30a - 10x}$, und dessen Werth, für $x = 2a$, $= \frac{6}{5}a^2$; also das Moment der Trägheit des Sphäroids für die durch seinen Pol gehende Tangente $= \frac{1}{5} Mb^2 + \frac{6}{5} Ma^2$; und für den Durchmesser seines Aequators $= \frac{1}{5} M (a^2 + b^2)$.

Von der Schwingung der Körper um feste Axen.

§. 215.

Man nennt im Allgemeinen jede Bewegung **wiederkehrend**, die innerhalb gewisser Grenzen nur eine

Zeitlang auf einerley Art fortdauert, und alsdann plötzlich in die entgegengesetzte übergeht, so daß ein Körper, der einer solchen Bewegung unterworfen ist, nach Verlauf einer bestimmten Zeit allemal wieder an seinen vorigen Ort, und in seine anfängliche Lage zurückkommt. Bey festen Körpern giebt es nur drey Arten derselben: die **fortrückende**, wobey der Körper einerley Weg wechselsweise vor und rückwärts macht; die **drehende**, wobey er um eine feste Axe einerley Winkel hin und her beschreibt; und endlich die **zusammengesetzte**, die aus fortrückender und drehender Bewegung zugleich besteht.

Letztere beyden Arten führen auch gemeinschaftlich den Namen **Schwingungen**, weil sie sich größtentheils nach einerley Gesetze richten, wiewohl sie sonst, ihrem Wesen nach, ganz verschieden von einander sind; wie z. B. die rollende Schwingung eines Cylinders, der sich innerhalb einer hohlen Kurve hin und her wälzt, und das Schwanken desselben um eine feste Axe. Noch mehr unterscheiden sich von diesen die Schwingungen der biegsamen und elastischen Körper, bey denen zugleich eine Aenderung ihrer Form statt findet: da aber die Bewegung dieser Körper überhaupt auf ganz eigenthümlichen Gründen beruhet, so werde ich alles dahin gehörige ganz zuletzt in ein besonderes Kapitel zusammenfassen.

Gegenwärtige Betrachtung betrifft nur allein die drehende Schwingung eines festen Körpers, und zwar in sofern sie durch sein eigenes Gewicht hervorgebracht wird. Sie findet unstreitig hier ihren schicklichsten Platz, da sie sich unmittelbar auf die vorhergehende Theorie gründet, und als eine nützliche Anwendung derselben zugleich zu ihrer nähern Erläuterung dienen kann.

§. 216.

Ein Körper, der an einer unbeweglichen horizontalen Axe frey aufgehängt wird, und Anfangs in Ruhe ist, kann darin nur beharren, wenn sein Schwerpunkt in die, durch die Axe gehende, vertikale Ebene fällt. In jeder andern Lage muß er nothwendig, da sein Schwerpunkt alsdann nicht unterstützt ist, vermöge seines Gewichtes herabsinken, und dadurch um die feste Axe in eine drehende Bewegung gesetzt werden. Um nun diese zu bestimmen, sey

Fig. 28. 1) G der anfängliche Ort des Schwerpunktes; C der Punkt der Axe, worin sie von einer, durch G gehenden, auf sie senkrechten Ebene geschnitten wird; die Entfernung CG = f, und die Abweichung dieser Linie von der Vertikale CI = η.

2) Nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat, sey der Schwerpunkt durch den Bogen GM fortgerückt; sein jetziger Abstand MCI von der Vertikale = ϕ, und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers in diesem Augenblicke = γ; so ist der Winkel GCM, um den sich der Körper gedrehet hat, = $\eta - \phi$, also (§. 198.)

$$\gamma = \frac{d(\eta - \phi)}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}, \text{ und } \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

3) Man nenne ferner das Gewicht des Körpers,

das von seinem Schwerpunkte aus nach der Vertikale Mv wirkt, = M, und um den Theil davon zu erhalten, der zur Umdrehung des Körpers allein wirksam ist, zerlege man es in eine Kraft nach Mr, der Verlängerung von CM, und in eine, darauf senkrechte, nach Mu. Erstere, = M Cos φ, übt nach der Richtung CM einen Druck auf den Punkt C der Axe aus, und wird dadurch aufgehoben; letztere hingegen, = M Sin φ wird ganz auf die Umdrehung des Körpers verwandt, und hat gegen die Axe das Moment = Mf Sin φ.

4) Es bleibt jetzt noch übrig, das Moment der Trägheit des Körpers für die Umdrehungsaxe zu wissen. Zu dem Ende sey dasselbe in Ansehung der durch seinen Schwerpunkt gehenden, mit jener parallelen, Axe = Mh^2, das sich aus der gegebenen Gestalt des Körpes auf irgend eine Art wird bestimmen lassen; so ist das gesuchte = $M(f^2 + h^2)$ (§. 208. 3.).

5) Demnach erhält man (§. 200.)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gMf\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{M(f^2+h^2)} = \frac{2gf\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{f^2+h^2},$$

woraus die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2gf\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{f^2+h^2}$$ entspringt.

6) Diese mit $2d\varphi$ multiplicirt, und dann integrirt, giebt:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \gamma^2 = C + \frac{4gf\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{f^2+h^2},$$

und da zu Anfange der Bewegung, oder für $\gamma = 0$, $\varphi = \eta$ war, so wird zur Bestimmung der Konstante

$$o = C + \frac{4gf \, Cos \, \eta}{f^2 + h^2},$$

also $C = -\frac{4gf \, Cos \, \eta}{f^2 + h^2}$; und folglich:

$$\gamma^2 = \frac{4gf}{f^2 + h^2} \cdot (Cos \, \varphi - Cos \, \eta).$$

§. 217.

1. So lange also der Winkel φ positiv bleibt, oder M noch diesseits der Vertikale CI sich befindet, wächst die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, wie sein Schwerpunkt der Vertikale nach und nach näher rückt.

2. Wenn er in sie hinein zu liegen kommt, ist $\varphi = o$, folglich

$$\gamma = \sqrt{\left[\frac{4gf}{f^2 + h^2} (1 - Cos \, \eta)\right]}.$$

Dies ist offenbar der größte Werth, den γ erreichen kann, weil für jeden andern Winkel φ, er sey positiv oder negativ, allemal $Cos \, \varphi < 1$ ist. Der Körper dreht sich also in der Lage, worin er von der Axe gänzlich unterstützt wird, gerade am schnellsten.

3. Von diesem Augenblicke an tritt nun der Schwerpunkt auf die andere Seite der Vertikale, und entfernt sich von ihr, indem er durch den andern Bogen Ig aufwärts steigt. Daher wird jetzt der Winkel φ negativ, und nimmt an absoluter Größe wieder zu.

4. Da $Cos - \varphi = Cos \, \varphi$ ist, so hat der Körper bey einerley Abweichung seines Schwerpunktes von der Vertikale einerley Winkelgeschwindigkeit. Sie nimmt

folglich ab, indem Φ wächst, und wird zum zweytenmale $= 0$, wenn $\Phi = -\eta$ wird, oder der Schwerpunkt in g eben den Winkelabstand gCI von der Vertikale erreicht hat, den er Anfangs auf der andern Seite in G hatte.

5. Weiter kann also derselbe von CI sich nicht entfernen; wie auch schon aus der Formel (§. 216. 6.) erhellet, die für ϑ einen unmöglichen Werth giebt, wenn man darin $\varphi > \eta$ annimmt.

6. Da alles sich jetzt verhält, wie zu Anfange der Bewegung auf der andern Seite von CI, so folgt nothwendig, daß sich der Körper nun rückwärts drehen, und in jeder Lage aufs neue dieselbe Geschwindigkeit bekommen müsse, die er darin zuvor nach entgegengesetzter Richtung hatte.

7. Demnach schwingt derselbe innerhalb dem Winkelraume GCg unaufhörlich fort, oder beschreibt diesen Winkel um seine Axe in gleichen Zeitabtheilungen wechselsweise bald nach der einen, bald nach der andern Seite.

§. 218.

Aufgabe. Die Zeit T zu bestimmen, in welcher der Körper den Winkel GCI an der Axe zurücklegt, oder dessen Schwerpunkt aus seinem anfänglichen Orte G bis zu seinem tiefsten Orte I herabsinkt.

Aufl. 1) Wenn man für ϑ^2 seinen Werth $\frac{d\Phi^2}{dt^2}$ wieder substituirt, und der Kürze wegen $\frac{2gf}{f^2 + h^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$ setzt, so giebt die Formel (§. 216. 6.):

$$\varkappa^2 \cdot \frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta,$$

woraus man: $dt = \frac{-\varkappa d\varphi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}$ erhält.

Es muß hier nemlich von den beyden Wurzeln deshalb die negative genommen werden, weil der Winkel φ abnimmt, indem t wächst; also $d\varphi$ und dt einander entgegen gesetzt sind.

2) Nun ist $\operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cos} \eta = 1 - \operatorname{Cos} \eta - (1 - \operatorname{Cos} \varphi) = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta^2 - 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi^2$; folglich $\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta)} = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta \sqrt{(1 - \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi^2}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta^2})}$. Setzt man daher $\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta} = \operatorname{Sin} \psi$, und noch zur Abkürzung $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\eta = i$, so wird

$$\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta)} = 2i\sqrt{(1 - \operatorname{Sin} \psi^2)}$$
$$= 2i \operatorname{Cos} \psi.$$

3) Ferner bekommt man aus der Gleichung $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi = i \operatorname{Sin} \psi$ durchs Differenziiren $\frac{1}{2} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \varphi d\varphi = i \operatorname{Cos} \psi d\psi$, also:

$$d\varphi = \frac{2i \operatorname{Cos} \psi d\psi}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\varphi} = \frac{2i \operatorname{Cos} \psi d\psi}{\sqrt{(1 - i^2 \operatorname{Sin} \psi^2)}}.$$

4) Diese Werthe in den Zähler und Nenner von dt substituirt, geben: $dt = \frac{-\varkappa d\psi}{\sqrt{(1 - i^2 \operatorname{Sin} \psi^2)}}$, oder, wenn man die Wurzelgröße in eine Reihe auflößt:

$$dt = -\varkappa d\psi (1 + \tfrac{1}{2} i^2 \operatorname{Sin} \psi^2 + \tfrac{3}{8} i^4 \operatorname{Sin} \psi^4 + \tfrac{5}{16} i^6 \operatorname{Sin} \psi^6 + \ldots)$$ mithin:

$$t = C - \varkappa [\psi + \tfrac{1}{2} i^2 \int \operatorname{Sin} \psi^2 d\psi + \tfrac{3}{8} i^4 \int \operatorname{Sin} \psi^4 d\psi + \ldots].$$

5) Für $t = 0$ ist $\Phi = \eta$, also $\text{Sin}\,\psi = 1$, oder $\psi = \frac{1}{2}\pi$, oder für $t = T$, $\Phi = 0$, folglich auch $\psi = 0$. Man braucht also hier nur von den in der Reihe vorkommenden Integralen die besonderen Werthe für $\psi = 0$ und $\psi = \frac{1}{2}\pi$ zu wissen, zu denen man folgendermaßen gelangt:

6) Es ist $d\,.\,\text{Sin}\,\psi^m\,\text{Cos}\,\psi = m\,\text{Sin}\,\psi^{m-1}\,\text{Cos}\,\psi^2 d\psi - \text{Sin}\,\psi^{m+1}\,d\psi$, und dies $= m\,\text{Sin}\,\psi^{m-1}\,d\psi - (m+1)\,\text{Sin}\,\psi^{m+1}\,d\psi$, indem man für $\text{Cos}\,\psi^2$ seinen Werth $1 - \text{Sin}\,\psi^2$ setzt. Wird nun auf beyden Seiten wiederum integrirt, so erhält man:

$$\text{Sin}\,\psi^m\,\text{Cos}\,\psi = m\int \text{Sin}\,\psi^{m-1}\,d\psi - (m+1)\int \text{Sin}\,\psi^{m+1}\,d\psi,$$

also: $\displaystyle\int \text{Sin}\,\psi^{m+1}\,d\psi = \frac{m}{m+1}\,.\int \text{Sin}\,\psi^{m-1}\,d\psi - \frac{\text{Sin}\,\psi^m\,\text{Cos}\,\psi}{m+1}$, oder $m - 1 = 2n$ gesetzt:

$$\int \text{Sin}\,\psi^{2n+2}\,d\psi = \frac{2n+1}{2n+2}\int \text{Sin}\,\psi^{2n}\,d\psi - \frac{\text{Sin}\,\psi^{2n+1}\,\text{Cos}\,\psi}{2n+2}.$$

Daher hat man sowohl für $\psi = 0$, als auch für $\psi = \frac{1}{2}\pi$

$$\int \text{Sin}\,\psi^{2n+2}\,d\psi = \frac{2n+1}{2n+2}\int \text{Sin}\,\psi^{2n}\,d\psi.$$

7) In dem einfachsten Falle $n = 0$ ist nun $\text{Sin}\,\psi^0 d\psi = \int d\psi = \psi$, also wird dies Integral $= 0$, wenn man darin $\psi = 0$ setzt; mithin verschwinden für $\psi = 0$ auch alle die übrigen Integrale $\int \text{Sin}\,\psi^2 d\psi$, $\int \text{Sin}\,\psi^4 d\psi$ u. s. w.

8) Dagegen ist für $\psi = \frac{1}{2}\pi$

$$\int \text{Sin}\, \psi^0 d\psi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

folglich $\int \text{Sin}\, \psi^2 d\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi,$

$$\int \text{Sin}\, \psi^4 d\psi = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\pi,$$

und überhaupt $\int \text{Sin}\, \psi^{2n} d\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot\cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2}\pi.$

9) Für $\psi = 0$ erhält man demnach (4) $T = C$, und für $\psi = \frac{1}{2}\pi$:

$$0 = C - \tfrac{1}{2}\pi\varkappa\,(1 + \tfrac{1}{4}i^2 + \tfrac{9}{16}i^4 + \tfrac{25}{256}i^6 \ldots$$

$$+ (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot\cdot \frac{2n-1}{2n})^2 i^{2n} + .)$$

Daher endlich:

$T = \frac{1}{2}\pi\varkappa\,(1 + \frac{1}{4}\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{9}{16}\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\eta^4 + \frac{25}{256}\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\eta^6 + \ldots)$, worin $\varkappa = \sqrt{(\frac{f^2 + h^2}{2gf})}$ ist.

§. 219.

Da der Schwerpunkt des Körpers in gleichen Abweichungen von der Vertikale einerley Geschwindigkeit hat, also einerley Zeit gebraucht, um gleiche Elemente seines Weges, die auf beyden Seiten der Vertikale gleich weit von ihr entfernt sind, zurückzulegen, so erhellet, daß auch die ganze Zeit, worin er durch den folgenden Bogen Ig aufwärts steigt, mit der gefundenen Zeit T seines Niederganges durch GI einerley seyn müsse. Demnach ist die Zeit, worin er den ganzen Bogen GIg beschreibt, = 2T (wie auch die allgemeine Formel (4) giebt, wenn man darin $\varphi = -\eta$, oder $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ setzt), und endlich die Dauer einer ganzen Schwingung, oder die Zeit eines Hinganges durch Gg und Herganges durch gG zusammengenommen, $= 4T$.

§. 220.

Bey unendlicher Abnahme des Schwingungsbogens nähert sich die Zeit T unendlich der Grenze $= \frac{1}{2}\pi\varkappa = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\left(\frac{f^2 + h^2}{2gf}\right)}$. Für einen Schwingungsbogen von gegebener Größe ist daher T jederzeit um etwas größer, als $\frac{1}{2}\pi\varkappa$; wofern aber derselbe nur einigermaßen gering ist, beträgt der Ueberschuß doch so wenig, daß man ihn ohne Nachtheil der Genauigkeit in den meisten Fällen wird außer Acht lassen können. Wir wollen z. B. setzen, der Körper schwinge in einem Bogen $2\eta = 12°$, und für unendlich kleine Schwingungen desselben sey die Zeit $\pi\varkappa$ seines Hinganges durch Gg $= 1$ Sec., so wird

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\eta^2 & = & 0{,}00068476 \\ \frac{9}{16}\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\eta^4 & = & \ldots\ldots\ 422 \\ \hline 2T & = & 1{,}00068898'', \end{array}$$

so daß erst zwischen den Zeiten von 726 unendlich kleinen Schwingungen des Körpers, und solchen, die in einem Bogen von 12° geschehen, ein Unterschied von einer ganzen Sekunde entsteht.

§. 221.

Diese genaue Uebereinstimmung in der Zeit der Schwingungen für kleine Bogen derselben leitet auf eine sehr leichte und einfache Methode, das Moment der

Trägheit eines Körpers für irgend eine durch seinen Fig. 29. Schwerpunkt G gehenden Axe AB durch Versuche zu bestimmen. Man hänge nemlich den Körper an einer horizontalen Axe EF solchergestalt auf, daß die Linie AB ihr parallel zu liegen kommt, und messe die senkrechte Entfernung GC seines Schwerpunktes von dieser Axe; welche $= f$ heißen mag. Hierauf bringe man den Körper unmerklich aus seinem Gleichgewichte, so daß er um die Axe EF sehr kleine Schwingungen macht, und bestimme ihre Dauer mit möglichster Genauigkeit, wozu man ein Mittel aus einer beträchtlichen Anzahl derselben nehmen muß. Es sey nun die beobachtete Zeit einer halben Schwingung $= t$, so hat man

$$t^2 = \pi^2 \varkappa^2 = \frac{\pi^2 (f^2 + h^2)}{2gf}, \text{ also } h^2 = \frac{2gft^2}{\pi^2} - f^2,$$

und das gesuchte Moment der Trägheit des Körpers für die Axe AB:

$$Mh^2 = M \left(\frac{2gt^2 f}{\pi^2} - f^2 \right).$$

Vom einfachen und zusammengesetzten Pendel.

§. 222.

Da die Dauer der kleinern Schwingungen eines Körpers von der Größe des Schwingungsbogens unabhängig ist, und daher als unveränderlich angenommen werden kann, so hat sie alle Erfordernisse eines genauen und richtigen Zeitmaßes. Man nennt jeden Körper, der zu dieser Absicht an einer horizontalen Axe frey aufgehängt wird, ein **Pendel**, und die halbe Schwingung desselben, oder seine Umdrehung innerhalb des Winkel-Fig. 28. raumes GCg einen **Pendelschlag**. Beym Sekundenpendel, dessen man sich im gemeinen Leben und zum astronomischen Gebrauche am häufigsten bedient, dauert der Schlag genau eine Sekunde mittlerer Zeit.

§. 223.

Man nehme für das Pendel die Größen f und h^2 in der vorigen Bedeutung, und setze die Dauer seines Schlags $= t$, so hat man für kleine Ausweichungen desselben:

$$t^2 = \frac{\pi^2 (f^2 + h^2)}{2gf} = \frac{\pi^2}{2g}\left(f + \frac{h^2}{f}\right).$$

Das Pendel mag daher eine so geringe körperliche Ausdehnung haben, oder sein Moment der Trägheit Mh^2 so klein seyn, als man will, so kann man doch immer bewirken, daß es seine Schläge in einer gegebenen Zeit verrichten muß, wofern man nur seinen Schwerpunkt in die dazu nöthige Entfernung von der Axe bringt.

§. 224.

Die bequemste und vortheilhafteste Gestalt eines Pendels ist ohne Zweifel diejenige, wobey es, seiner Masse unbeschadet, den möglichst kleinsten Raum einnimmt, und der Luft, wegen ihres Widerstandes, die wenigste Fläche darbietet. Aus diesem Grunde nimmt man dazu gewöhnlich kleine Körperchen, die verhältnißmäßig bey geringer Ausdehnung viel Masse enthalten, als z. B. Kugeln von beträchtlichem specifischen Gewichte, und verbindet solche mit der Umdrehungsaxe durch eine sehr dünne, auf sie senkrecht befestigte, Stange. Wäre es möglich, irgend ein Gewicht in einem einzigen Fig. 29. Punkte O zusammen zu bringen, und diesen Punkt an einem Faden CO aufzuhängen, der gar keine Dicke hätte, und in C angeheftet wäre, so entstände daraus ein ganz unkörperliches oder einfaches Pendel, und man könnte dem Faden jederzeit eine solche Länge geben, daß der gedachte Punkt seine Schwingungen in einer bestimmten Zeit vollendete.

§. 225.

Aufgabe. Das einfache Pendel soll mit einem körperlichen oder zusammengesetzten Pendel, wofür f und h gegeben sind, gleichzeitige Schläge thun; man sucht seine Länge OC = l.

Aufl. Es sey die gemeinschaftliche Dauer ihres Schlags = t, so ist für das zusammengesetzte Pendel $t^2 = \frac{\pi^2}{2g}(f + \frac{h^2}{f})$, und für das einfache, weil da $h^2 = 0$, $f = l$ ist, $t^2 = \frac{\pi^2 l}{2g}$; mithin $l = f + \frac{h^2}{f}$.

§. 226.

Es giebt also in jedem Körper, der an einer horizontalen Axe frey aufgehängt ist, einen Punkt O, dessen Schwingungen um diese Axe mit denen des Körpers einerley Dauer haben würden, wenn er die ganze Masse desselben in sich vereinigte. Man erhält ihn nemlich, wenn man aus dem Schwerpunkte G auf die Axe das Perpendikel GC zieht, und darauf CO = der Länge des einfachen Pendels nimmt, das mit dem Körper gleichzeitige Schwingungen macht. Dieser Punkt heißt der **Schwingungspunkt** oder **Mittelpunkt der Schwingung** des Körpers.

§. 227.

1. Der Schwingungspunkt des Körpers liegt jederzeit in der Linie CG über den Schwerpunkt hinaus, und zwar in einer Entfernung von demselben $GO = l - f = \frac{h^2}{f}$. Daher läßt sich sein Ort leicht bestimmen, wofern man das Moment der Trägheit des Körpers für die, durch seinen Schwerpunkt gehende, mit der Umdrehungsaxe parallele Linie anzugeben weiß.

2. Hat man auf solche Art von einem zusammengesetzten Pendel den Mittelpunkt der Schwingung, oder die Entfernung $OC = l$ bereits gefunden, so erhält man daraus unmittelbar die Zeit seines Schlages $t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ (§. 223.); wodurch also die Bestimmung des Pendelschlags auf die des Schwingungspunktes zurückgeführt wird.

§. 228.

Aufgabe. Es sey das Pendel aus mehreren einfachen Stücken zusammengesetzt, deren Schwerpunkte gemeinschaftlich in einer, auf die Umdrehungsaxe senkrechten, geraden Linie liegen; man sucht seinen Schwingungspunkt.

Aufl. Man setze die Massen dieser einzelnen Stücke $= m, m', m''$ u. s. w.
die Entfernungen ihrer Schwerpunkte von der Axe $= x, x', x''$ u. s. w.
ihre Momente der Trägheit für die, durch ihre Schwerpunkte gehenden, mit der Axe parallelen, Linien $= mu^2, m'u'^2, m''u''^2$ u. s. w.,
so ist

1) die Entfernung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes von der Axe

$$f = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots},$$

oder, wenn wir die ganze Masse des Pendels M nennen,

$$Mf = mx + m'x' + m''x'' + \ldots.$$

2) Ferner sind die einzelnen Momente der Trägheit dieser Massen in Bezug auf die Schwingungsaxe $= m(x^2 + u^2)$, $m'(x'^2 + u'^2)$, $m''(x''^2 + u''^2)$ u. s. w. Daher ist das Moment der Trägheit des ganzen Pendels für diese Axe:

$$M(f^2 + h^2) = m(x^2 + u^2) + m'(x'^2 + u'^2) + m''(x''^2 + u''^2)$$

und folglich der Abstand eines Schwingungspunktes von derselben

$$l = \frac{M(f^2 + h^2)}{Mf} = \frac{m(x^2 + u^2) + m'(x'^2 + u'^2) + m''(x''^2 + u''^2) + \ldots}{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}$$

§. 229.

Exempel I. Das Pendel bestehe aus einer cylindrischen Ruthe, und in einer, an ihrem Endpunkte befestigten, Kugel. Das Gewicht der Ruthe sey $= m$, ihre Länge $= a$, ihre halbe Dicke $= i$; das Gewicht der Kugel $= M$, ihr Halbmesser $= e$; so hat man für erstere $x = \frac{1}{2}a$, $u^2 = \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}i^2$ (§. 209. 2.), $x^2 + u^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}i^2$, und für letztere $m' = M$, $x' = a + e$, $u'^2 = \frac{2}{5}e^2$ (§. 212. 2.), also:

$$l = \frac{M[(a+e)^2 + \frac{2}{5}e^2) + \frac{1}{3}m(a^2 + \frac{3}{4}i^2)}{M(a+e) + \frac{1}{2}ma}.$$

§. 230.

Exempel II. Die Pendelstange sey ein rechtwinklichtes Parallelepipedum; ihre Masse $= m$, Länge $= a$, Breite $= i$; das darangebrachte Gewicht M eine Linse, die aus zweyen gleichen und ähnlichen Kugelsegmenten besteht; die Dicke derselben $= 2e$, ihre Breite oder Durchmesser $= 2b$, so erhält man

1) für den Halbmesser der zu den Seiten der Linse gehörigen Kugel, welcher c heißen mag: $(c - e)^2 + b^2 = c^2$, also $c = \frac{b^2 + e^2}{2e}$.

2) Der Schwerpunkt der Linse fällt in die gemeinschaftliche Grundfläche ihrer beyden Hälften, und zugleich in die centrale Axe derselben, folglich in den Mittelpunkt der gedachten Fläche; daher wird $x' = a + b$.

3) Das Moment der Trägheit der Linse für ihre geometrische Axe, die auf der Schwingungsfläche senkrecht, also mit der Umdrehungsaxe parallel ist, wird durch eben die Formel (§. 212. 1.) ausgedrückt, die sich auf das einfache Kugelsegment bezieht; denn es ist

doppelt so groß, als das Moment der Trägheit des letztern, aber dagegen auch die Masse der Linse doppelt so groß, als die des einfachen Segmentes. Setzt man daher in jener Formel $a = \frac{b^2 + e^2}{2e}$, $x = e$, so bekommt man

$$u'^2 = \frac{10b^4 + 5b^2e^2 + e^4}{30b^2 + 10e^2}.$$

4) Für die Pendelstange ist endlich $x = \frac{1}{2}a$, $u^2 = \frac{1}{12}(a^2 + i^2)$ (§. 209. 1.) $u^2 + x^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{12}i^2$; mithin wird

$$l = \frac{M\left[(a+b)^2 + \frac{10b^4+5b^2e^2+e^4}{30b^2+10e^2}\right] + \frac{1}{3}m(a^2 + \frac{1}{4}i^2)}{M(a+b) + \frac{1}{2}ma}.$$

Anmerk. Bestehen die beyden Stücke des Pendels nicht aus einerley Materie, so kommt noch in Betracht, daß ein Theil der Pendelstange in der Linse enthalten ist. Diesen Fall betrachtet Herr **Bohnenberger** in seiner Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung §. 100.

§. 231.

Exempel III. An einer cylindrischen Ruthe, deren Masse $= m$, Länge $= a$, und halbe Dicke $= i$ ist, sey ein doppeltes Kegelsegment senkrecht befestigt, so daß dessen centrale Axe in die Verlängerung der Ruthe hineinfällt. Sein Gewicht sey $= M$, der Halbmesser seines mittlern Querschnittes $= b$, der Halbmesser der obern oder untern Grundfläche $= c$, und seine Höhe $= 2e$; man sucht den Schwingungspunkt dieses Pendels.

1) Da der Schwerpunkt des doppelten Kegelsegments in den Mittelpunkt seines mittlern Querschnittes

fällt, so hat man für dessen Entfernung von der Schwingungsaxe $x' = a + e$.

2) Um ferner sein Moment der Trägheit für den Durchmesser dieses Querschnittes zu finden, darf man nur dasselbe von dem einfachen Kegelsegmente suchen, und für dessen Masse das ganze Gewicht substituiren. Zu dem Ende sey die Masse des dazu gehörigen vollständigen Kegels $= G$, die des abgeschnittenen Stückes $= F$; die Höhe des erstern $= g$, des letztern $= f$; so ist das Moment der Trägheit des ganzen Kegels für die durch seinen Schwerpunkt gehende Queraxe $= \frac{3}{20} G (b^2 + \frac{1}{4} g^2)$ (§. 214. 3.). Dazu $\frac{1}{10} Gg^2$ addirt, giebt dasselbe für den Durchmesser der Grundfläche $= \frac{1}{20} G (3b^2 + 2g^2)$.

3) Auf gleiche Weise ist das Moment der Trägheit des fehlenden Kegels für die durch seinen Schwerpunkt gehende Axe $= \frac{3}{20} F (c^2 + \frac{1}{4} f^2)$, und folglich für den Durchmesser der eben gedachten Querfläche, indem man noch $F (\frac{1}{4} f + e)^2$ hinzufügt, $= \frac{1}{20} F (3c^2 + 2f^2) + \frac{1}{2} F (ef + 2e^2)$, oder, da $F = \frac{c^3}{b^3} \cdot G$, und $f = \frac{cg}{b}$ ist,

$$= \frac{c^5 G}{20 b^5} (3b^2 + 2g^2) + \frac{1}{2} F (ef + 2e^2).$$

4) Dies von dem erstern subtrahirt, bleibt das Moment der Trägheit des abgekürzten Kegels für eben die Axe

$$= \frac{1}{20} G (1 - \frac{c^5}{b^5}) (3b^2 + 2g^2) - \frac{1}{2} F (ef + 2e^2)$$

und wenn wir jetzt unter F und G das Doppelte derselben verstehen, so drückt diese Formel zugleich das Moment der Trägheit des doppelten Kegelsegments für die durch seinen Schwerpunkt gehende Zwergaxe aus.

5) Dies vorausgesetzt, ist $M = G - F = G\left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right)$, also $G = \frac{b^3 M}{b^3 - c^3}$, $F = \frac{c^3 M}{b^3 - c^3}$; ferner

$e = g - f = \left(1 - \frac{c}{b}\right) g$, $g = \frac{be}{b-c}$, $f = \frac{ce}{b-c}$;

wodurch sich die Formel in folgende verwandelt:

$$\tfrac{3}{20} M \frac{(b^5 - c^5)}{b^3 - c^3} \cdot \left[3 + \frac{2e^2}{(b-c)^2}\right] - \tfrac{1}{2} M \frac{c^3 e^2}{b^3 - c^3} \cdot \left(\frac{2b - c}{b - c}\right).$$

6) Werden noch darin die beyden letztern Theile vom erstern getrennt, und in eins zusammengezogen, so erhält man endlich:

$$u'^2 = \frac{3(b^5 - c^5)}{20(b^3 - c^3)} + \frac{b^2 e^2 (b + 2c)}{10(b^3 - c^3)} + \frac{3c^2 e^2 (b - 2c)}{10(b^3 - c^3)}.$$

7) Für die cylindrische Ruthe ist $x = \frac{1}{2} a$, $x^2 + u^2 = \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{4} i^2$; mithin wird:

$$l = \frac{M\left[(a + e)^2 + u'^2\right] + \frac{1}{3} m \left(a^2 + \frac{3}{4} i^2\right)}{M(a + e) + \frac{1}{2} ma}.$$

§. 232.

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$, für die Dauer der halben Schwingung eines einfachen Pendels, dessen Länge $= l$ ist (§. 227. 2.), wird gegenseitig

$$l = \frac{2gt^2}{\pi^2}.$$

Nennt man nun die Länge des einfachen Pendels, das Sekunden schlägt $= L$, so erhält man für $t = 1$

$$L = \frac{2g}{\pi^2}.$$

Dies statt $\frac{2g}{\pi^2}$ in die vorige Formel gesetzt, giebt $l = t^2 L$; woraus $t = \sqrt{\frac{l}{L}}$ wird.

Weiß man also die Länge des einfachen Sekundenpendels, so findet man daraus für jedes zusammengesetzte Pendel die Zeit seines Schlages in Sekunden, wenn man die Entfernung seines Schwingungspunktes von der Axe durch jene Länge dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

§. 233.

Zu den Versuchen, die Länge des einfachen Sekundenpendels zu bestimmen, bedient man sich gewöhnlich kleiner Gewichte, die entweder die Gestalt einer Kugel, oder eines doppelten Kegelsegmentes haben, und nimmt statt der Pendelstange einen sehr dünnen Faden, woran man sie in kleinen Bogen schwingen läßt. Hat man nun beobachtet, wie viel Schläge ein solches Pendel in einer geraumen Zeit verrichtet, so kann man daraus mit vieler Genauigkeit einen mittleren Werth t für die Dauer eines einzelnen Schlages bestimmen; und wird alsdann noch aus den gegebenen Abmessungen des Pendels nach obigen Formeln (§. 228. u. f.) der Abstand seines Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte

$= l$ hergeleitet, so ergiebt sich aus den beyden Größen t und l die Länge des einfachen Sekundenpendels $L = \frac{l}{t^2}$ (§. 231.).

§. 234.

Da ein solches Pendel in seiner Form dem einfachen ziemlich nahe kommt, so ist leicht vorauszusehen, daß der Abstand zwischen dem Schwerpunkte des Gewichtes und dem Aufhängepunkte, den wir f nennen wollen, von der zu findenden Länge l sehr wenig verschieden seyn müsse, und folglich, um letztere daraus zu erhalten, nur einer geringen Korrektion bedürfe. Daher läßt sich die Formel §. 229. für gegenwärtigen Fall noch weit einfacher, und zum Gebrauche bequemer einrichten, ohne daß die erforderliche Genauigkeit dadurch verletzt wird. Zuvörderst erhält man nemlich, wenn man $a + e = f$ setzt, und die halbe Dicke des Fadens als unbedeutend wegläßt:

$$l = \frac{M(f^2 + \frac{2}{5}e^2) + \frac{1}{3}m(f-e)^2}{Mf + \frac{1}{2}m(f-e)},$$

und da auch gewiß m und e allemal so gering sind, daß man m^2 gegen M^2, und em gegen fM vernachläßigen kann, so wird ferner:

$$l = [f + \frac{2e^2}{5f} + \frac{m(f-e)^2}{3Mf}][1 - \frac{m(f-e)}{2Mf}]$$
$$= f + \frac{2e^2}{5f} - \frac{m(f+e)}{6M}.$$

Man nenne noch das Gewicht des Fadens für 1 Fuß

Länge $= K$; dies giebt $m = K(f - e)$; oder, wenn f und e in Linien bestimmt werden, wie das hierbey gewöhnlich geschieht, $m = \frac{K(f-e)}{144}$; also wird das letzte Glied $= \frac{K(f^2 - e^2)}{864M}$, worin man e^2 gegen f^2 weglassen kann; mithin:

$$l = f + \frac{2e^2}{5f} - \frac{Kf^2}{864M}.$$

§. 235.

Wir wollen von dieser Formel auf die erstern drey von Herrn Mairans bekannten Versuche *), zu denen allein die nöthigen Data angeführt sind, eine Anwendung machen. Für den Aloefaden (file de pite), dessen er sich dabey bediente, finde ich $K = 0{,}11$ Gran. Das Uebrige ist aus nachfolgender Tafel zu ersehen:

Rad. der Kugel e in Linien.	Gew. M in Gran.	Länge f	Zeit der Beob. in Sekund.	Anzahl der Schl.
3,42	400	860,16	1397	1000
6,13	1707	439,97	2840	2842
6,13	1707	442,40	6810	6796

Zur Vermeidung aller Weitläuftigkeit will ich die Rechnung bloß für den dritten Versuch, der nach seinem Zeugnisse von allen der genaueste ist, hersetzen:

$$\log 4e^2 = 2{,}1769810$$
$$\text{davon } \log 10f = 3{,}6458151$$
$$\text{bleibt } 0{,}5311659 - 2$$

*) Mem. de l'acad. 1735 pag. 183 u. f.

$$\frac{4e^2}{10f} = 0{,}033975$$

$$\log Kf^2 = 4{,}3330229$$

$$\log 864M = 6{,}1687472$$

$$\text{bleibt } 0{,}1642757 - 2$$

$$\frac{Kf^2}{864M} = 0{,}014597$$

$$\text{Korrektion} = 0{,}019378$$

$$l = 442{,}419378$$

$$\text{Ferner } \log l = 2{,}6458342$$

$$\log t^2 = 0{,}0017874$$

$$\log L = 2{,}6440468$$

$$L = 440{,}602 \text{ Lin.}$$

Auf gleiche Art giebt der erste Versuch $l = 859{,}93$, $t = 1{,}397''$, also

$$L = 440{,}626'''$$

der zweyte $l = 439{,}9897$, $t = 0{,}9993$, also

$$L = 440{,}606'''.$$

Der erste Versuch möchte wohl wegen der kürzeren Dauer der Beobachtung der unsicherste seyn, zumal da der Beobachter erst nachher auf eine sichere und bequeme Methode verfiel, eine beträchtliche Anzahl von Schlägen mit denen seiner Pendeluhr zu vergleichen. Es würde also nicht zweckmäßig seyn, diesen Versuch mit den andern beyden, die sehr genau mit einander übereinstimmen, zu vermengen, und daraus ein Mittel für L herzunehmen.

§. 236.

Noch muß ich eines Versuches erwähnen, der vom P. **Liesganig** zu Wien mit einem doppelten Kegelsegmente, und zwar nach dem Zeugnisse des Hrn. **Scherffer** *) auf das sorgfältigste und genaueste, angestellt worden ist. Seine Angaben von diesem Pendel sind folgende:

Das Gewicht des doppelten Kegelsegmentes $M =$ 540 Gran, seine Höhe $2e = 11,962$ Lin. Wiener Maaß, der Halbmesser des mittlern Querschnittes $b =$ 4,26 Lin., der Grundfläche $c = 2,28$ Lin. Der Abstand seines Schwerpunktes vom Aufhängepunkte $=$ 437,922 Lin., das Gewicht des Fadens $m = \frac{1}{3}$ Gran, die Anzahl der Schläge innerhalb $86409,4'' = 87861$, also die Dauer eines einzelnen Schlages $t = 0,9835''$.

Will man in der Berechnung von l sich einer ähnlichen Abkürzung hier bedienen, wie bey der Kugel, so erhellet leicht, daß man nur in der Formel (§. 234.) statt des Momentes der Trägheit $\frac{2}{5} Me^2$ der Kugel das Moment der Trägheit des Gewichtes M überhaupt zu setzen habe, es mag dasselbe gestaltet seyn, wie man will, wofern es nur klein ist. Nennt man also dies Moment der Trägheit Mh^2, so bekommt man allgemein:

$$l = f + \frac{h^2}{f} = \frac{m(f+e)}{6M},$$

und für gegenwärtigen Fall (§. 231. 6.)

*) S. die Beyträge zu verschiedenen Wissenschaften von einigen österreichischen Gelehrten, Wien 1775. S. 84.

$$h^2 = \frac{1}{20\,(b^3 - c^3)} [3\,(b^5 - c^5) + 2b^2e^2$$
$$(b + 2c) + 6c^2e^2\,(b - 2c)]$$

wonach die Rechnung folgendermaßen sich führen läßt:

$$\log(b + 2c) = 0{,}9454686$$
$$\log\ 2b^2e^2 = 3{,}1133968$$
$$\overline{4{,}0588654}$$
$$2b^2e^2\,(b + 2c) = 11451{,}58.$$
$$\log(2c - b) = 0{,}4771212 - 1$$
$$\log\ 6c^2e^2 = 3{,}0475685$$
$$\overline{2{,}5246897}$$
$$6c^2e^2\,(2c - b) = 334{,}726$$
$$3\,(b^5 - c^5) = 4024{,}065$$

$$\text{Zähler von } h^2 = 15140{,}92$$
$$\text{Nenner } 20\,(b^3 - c^3) = 1309{,}13$$
$$h^2 = 11{,}5656$$
$$\log h^2 = 1{,}0631695$$
$$\text{davon } \log f = 2{,}6413968$$
$$\text{bleibt } 0{,}4217727 - 2$$
$$\frac{h^2}{f} = 0{,}02641$$
$$\frac{m\,(f + e)}{6M} = 0{,}04567$$

$$\text{Korrektion} = -\ 0{,}01926$$
$$f = 437{,}922$$
$$l = 437{,}903$$

Dies durch das Quadrat der oben angeführten Zeit t dividirt, giebt die Länge des einfachen Sekundenpendels $L = 452{,}739$ Linien Wienermaaß, oder $= 440{,}562$ Pariser Linien.

§. 237.

Da $L = \frac{2g}{\pi^2}$ (§. 232.), so erhält man nunmehr gegenseitig aus der eben bestimmten Länge des Sekundenpendels den Fallraum der Körper in einer Sekunde $g = \frac{1}{2}\pi^2 L$. Nun ist nach dem leztern Versuche

$$\begin{array}{rrcl} & \log L & = & 2{,}6440071 \\ \text{ferner} \ldots & \log \pi^2 & = & 0{,}9942997 \\ \hline & & & 3{,}6383068 \\ & & & 0{,}3010300 \\ \hline & \log g & = & 3{,}3372768 \end{array}$$

also $g = 2174{,}0865$ Par. Linien $= 15{,}0978$ Par. Fuß, oder, wenn man die Anzahl der Linien durch 139,13 dividirt, bekommt man in Rheinl. Maaße $g = 15{,}6263$ Fuß.

Schwingung des Körpers bey inklinirter Lage seiner Axe.

§. 238.

Fig. 30. **Aufgabe.** Die Axe AB eines gegebenen Körpers sey gegen die Horizontale unter einem Winkel $= I$ geneigt; man sucht die Zeit seiner Schwingung.

Aufl. 1) Man fälle aus seinem Schwerpunkte M auf die Axe AB das Perpendikel MC, ziehe durch C die Vertikale CD, und in der dadurch entstehenden vertikalen Ebene ACD die Linie CI ebenfalls auf AB senkrecht; so ist die ganze Ebene MCI auf AB senkrecht, und es liegt also in ihr der Bogen, den der Schwerpunkt bey der Umdrehung des Körpers um C beschreibt.

2) Man zerlege sein Gewicht M, das aus M nach der Vertikale Mv wirkt, in eine Kraft nach Mp, parallel CI, und in eine darauf senkrechte, deren Richtung also mit der Axe AB parallel ist. Von ersterer, $= M \cos pMv = M \cos DCI = M \cos I$, fällt die Richtung in die Umdrehungsebene; von letzterer hingegen, $= M \sin I$, steht sie auf jener Ebene senkrecht, woraus erhellet, daß diese Kraft zur Umdrehung des Körpers nichts beytragen könne.

3) Man zerlege noch die Kraft $M \cos I$ in eine nach der Verlängerung von CM, und in eine auf CM senkrechte. Erstere, $= M \cos I \cos MCI$ verwandelt sich ebenfalls in einen bloßen Druck, weil ihre Richtung durch die Axe geht; letztere, $= M \cos I \sin MCI$ wird dagegen ganz auf die Beschleunigung der Rotation des Körpers verwandt.

4) Nennt man daher, wie im §. 216., die Entfernung $CM = f$, die Abweichung dieser Linie von der vertikalen Ebene, oder von CI, in der jetzigen Lage des Schwerpunktes $= \varphi$, ihren anfänglichen Abstand von derselben $= \eta$, die Winkelgeschwindigkeit des Körpers in gegenwärtigem Augenblicke $= \vartheta$, sein Moment der Trägheit für die durch M gehende, mit AB parallele, Axe $= Mh^2$, so erhält man

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{2gfM \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \varphi}{M(f^2 + h^2)} = \frac{2gf \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \varphi}{f^2 + h^2},$$

oder $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-2gf \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \varphi}{f^2 + h^2}$.

5) Diese Gleichung, wie im §. 216. behandelt, und $\frac{2gf}{f^2 + h^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$ gesetzt, giebt:

$$dt = \frac{-\varkappa \operatorname{Sec} I \,.\, d\varphi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}.$$

6) Für den Fall, wo die Axe horizontal, oder $I = 0$ ist, verwandelt sich die Formel in die gewöhnliche: $dt = -\frac{\varkappa d\varphi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}$. Nennt man also die Zeit, worin der Körper den Winkel $\eta - \varphi$ an der horizontalen Axe zurücklegen würde, $= T$, so wird:

$$dt : dT = \operatorname{Sec} I : 1 \text{ oder}$$
$$dt = dT \,.\, \operatorname{Sec} I$$
$$\text{also } t = T \operatorname{Sec} I,$$

wozu keine Konstante addirt wird, wenn man beyde Zeiten von dem gemeinschaftlichen Augenblicke anrechnet, wo die Linie CM um den anfänglichen Winkel η von der Vertikale entfernt liegt.

7) Demnach ist die Zeit einer halben Schwingung des Körpers $= \pi\varkappa \operatorname{Sec} I = \pi \operatorname{Sec} I \sqrt{\left(\frac{f^2 + h^2}{2gf}\right)}$.

§. 239.

Ein Pendel schwingt also langsamer, wenn seine

Axe aus der horizontalen Lage in irgend eine inclinirte gebracht wird, und zwar verhält sich die Zeit seines Schlages verkehrt wie der Kosinus des Neigungswinkels seiner Axe gegen den Horizont. Man sieht hieraus, daß zum richtigen Gange einer Pendeluhr durchaus erforderlich sey, daß die Axe des Pendels beständig horizontaler Lage, oder die Uhr selbst in vertikaler Stellung bleibe; daher eine solche Uhr auf beweglichem Boden, z. B. auf dem Schiffe, nicht gebraucht werden kann.

Betrachtung einer zusammengesetzten Maschine, die eine oder mehrere feste Axen hat.

§. 240.

Wenn die Masse M zwar an sich um eine feste Axe beweglich ist, aber dabey noch mit andern Massen in einer solchen Verbindung steht, daß diese durch ihre Umdrehung zugleich mit in eine drehende oder auch fortrückende Bewegung gesetzt werden, so ist die einfache Formel (§. 200.) zur Bestimmung ihrer Winkelgeschwindigkeit allein nicht hinreichend, weil alsdann ein Theil der Kraft, die sie zu drehen strebt, auf die Bewegung der übrigen Massen verwandt werden muß. Indeß läßt sich der Gebrauch der gedachten Formel doch auch auf diesen zusammengesetzteren Fall ausdehnen, wofern man nur nach der im fünften Kapitel vorgetragenen Methode das Gesetz der ganzen Bewegung auf das Gleichgewicht zurückzuführen sucht.

Man setze zu dem Ende das Moment der Trägheit

der

der Masse M in Ansehung ihrer Umdrehungsaxe $= Mh^2$; ihre noch unbekannte Winkelgeschwindigkeit für eine gegebene Zeit $t = \vartheta$; das statische Moment der Kraft, die ihr diese Geschwindigkeit während der Zeit t ertheilt haben würde, wenn sie mit den andern Massen in keiner Verbindung stände, $= Vf$, so hat man:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gfV}{Mh^2}, \text{ also}$$

$$Vf = \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Wenn man nun auf gleiche Art für jede der übrigen Massen die Kraft zu bestimmen sucht, wodurch ihr, wenn sie allein vorhanden wäre, eben die Bewegung ertheilt würde, die sie in jetzigem Zusammenhange mit den andern Massen wirklich bekommt, so müssen alle diese einzelnen virtuellen Kräfte an ihren Stellen den gegebenen Kräften, die das ganze System von Massen eigentlich in Bewegung setzen, in einerley Zeitpunkte äquipollent seyn, und folglich, nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Ich will diesen Satz, der an sich klar ist, aber in der Anwendung dem angehenden Mechaniker Schwierigkeiten machen könnte, durch einige besondere Fälle erläutern.

§. 241.

Aufgabe. Um eine cylindrische Welle schlingt sich ein Seil, wovon das eine Ende auf ihrem Umfange befestigt, das andere von ihm herabgeleitet ist, mehrere male herum. An letzteres Ende wird ein Gewicht P gehängt, das also, indem es niedersinkt, das Seil von der Welle abwickelt, und sie dadurch im Umlauf bringt. Man sucht sowohl das Fortrücken der Last, als das Drehen der Welle.

Aufl. Es sey der Halbmesser des Cylinders $= a$, seine Masse $= M$; also sein Moment der Trägheit für seine Axe $= \frac{1}{2} Ma^2$. Ferner sey nach Verlauf einer Zeit t seine Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$, ihre Aenderung im nächsten $dt = d\gamma$; so ist

1) das Moment der Kraft, die eben die Aenderung in der Umdrehung des Cylinders hervorbrächte, wenn er mit der Last P nicht behängt wäre, $= \frac{Ma^2}{4g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

2) Da die Last P um so viel herabsinkt, als das Stück des Seiles beträgt, das sich in eben der Zeit von der Welle abwickelt, so ist ihre Geschwindigkeit $v = a\gamma$, nemlich so groß, als die eines Punktes in dem Umfange der Welle; und ihr augenblicklicher Zuwachs $dv = ad\gamma$.

3) Daher die Kraft, die die Masse P eben so beschleunigen würde, wenn sie frey wäre, $= \frac{Pdv}{2gdt} = \frac{Pa}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und ihr Moment gegen die Axe der Welle $=$
$\frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

4) Die beyden Kräfte (1 und 3) wirken in Verbindung eben so auf Welle und Last, als das Gewicht

der letztern, das allein die ganze Bewegung verursacht, und sind ihm also in jedem Zeitpunkte der Bewegung äquipollent. Folglich müssen sie, nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihm an der Axe das Gleichgewicht halten; wodurch zwischen den Momenten dieser drey Kräfte folgende Gleichung entsteht:

$$\frac{Ma^2}{4g} \cdot \frac{d\gamma}{dt} + \frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = Pa$$

5) Demnach wird $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{4gP}{(2P+M)a}$, und

$$v = \frac{4gPt}{2P+M}.$$

Die Last sinkt also mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab; nur langsamer, als in dem Falle, wenn die Trägheit der Welle nicht in Betracht käme.

§. 242.

Zu eben dem Resultate wird man auch noch durch folgende Betrachtung geleitet:

Wäre die Bewegung der Masse P gleichförmig, so drehete sich auch der Cylinder gleichförmig, und es gehörte folglich keine Kraft dazu, ihn in dieser gleichförmigen Umdrehung zu unterhalten. Da aber ihre Geschwindigkeit v im folgenden Zeittheile dt den Zuwachs dv bekommt, so entsteht dadurch auch in der Winkelgeschwindigkeit des Cylinders eine Aenderung $\frac{dv}{a} = d\gamma$, und diese muß nothwendig die Masse P durch einen Theil ihres Gewichtes bewirken. Es sey dieser $= W$, so hat man:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gWa}{\frac{1}{2}Ma^2} = \frac{4gW}{Ma}, \text{ mithin}$$

$$W = \frac{Mad\gamma}{4gdt} = \frac{Mdv}{4gdt}.$$

Die Masse P wird also nur noch durch den übrigen Theil $P - W$ ihres Gewichtes beschleunigt, und es ist daher:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g(P-W)}{P}, \text{ oder } \frac{Pdv}{2gdt} = P - W = P - \frac{Mdv}{4gdt},$$

folglich $\frac{dv}{dt} = \frac{4gP}{2P+M}$, $v = \frac{4gPt}{2P+M}$, wie vorhin.

§. 243.

1. Das Seil spannt sich offenbar mit eben der Kraft, die zur Beschleunigung der Rotation des Cylinders verwandt wird, oder seine Spannung ist $= W$ $= P\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)$.

2) Diese Kraft, und das Gewicht M des Cylinders, bewirken also gemeinschaftlich einen vertikalen Druck der Zapfen auf ihre Lager $= W + M$, wodurch an dem Umfange derselben die Friktion $= \lambda (W + M)$ entsteht, die, wenn wir den Halbmesser der Zapfen $= e$ nennen, gegen die Axe das Moment $= \lambda e (W + M)$ hat.

3. Soll demnach bey dieser Bewegung die Friktion zugleich mit in Betracht gezogen werden, so kommt letzteres Moment noch zu den übrigen, in der Gleichung

(§. 241. 4.) linkerhand befindlichen, Momenten hinzu, und es wird daher:

$$\frac{adv}{4gdt}(2P+M)+\lambda e[M+P(1-\frac{dv}{2gdt})]=Pa,$$

woraus $\frac{dv}{dt}=\frac{4g[Pa-\lambda e(P+M)]}{(2a+\lambda e)P+Ma}$ folgt.

§. 244.

Aufgabe. An den Umfängen eines Rades und seiner Welle hängen die Massen P und Q, die diese Maschine nach entgegengesetzten Richtungen umzudrehen streben. Erstere Masse, an dem Rade, hat das Uebergewicht, und zieht die letztere aufwärts; man fragt nach der Bewegung, die beyde dadurch bekommen.

Fig. 14. **Aufl.** Es sey der Halbmesser des Rades AC $=a$, der Welle Bc $=b$; das Moment der Trägheit der Maschine in Ansehung der Umdrehungsaxe $=Mh^2$; ihre Winkelgeschwindigkeit für eine gegebene Zeit t $=\gamma$; die Aenderung derselben im nächsten $dt=d\gamma$; so ist

1) das Moment der Kraft, die in eben dem Zeittheile dt diese Aenderung hervorbringen würde, wenn die Maschine frey wäre $=\frac{Mh^2}{2g}\cdot\frac{d\gamma}{dt}$,

2) Die Geschwindigkeit v der Masse P nach der Richtung AM ist $=a\gamma$; also die Kraft, wodurch sie im nächsten dt um dv wachsen würde, wenn sich die Masse im abgesonderten Zustande befände, $=\frac{Pdv}{2gdt}$

$= \frac{Pa}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und ihr Moment gegen die Axe $=$ $\frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

3) Die Geschwindigkeit u der Masse Q nach der Richtung NB ist $= b\gamma$, mithin die erforderliche Kraft, sie um $du = bd\gamma$ zu vermehren $= \frac{Qdu}{2gdt} = \frac{Qb}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und ihr Moment $= \frac{Qb^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

4) Diese drey Kräfte bringen also in Verbindung eben die Wirkungen hervor, als die Gewichte P und Q, und müssen also, nach entgegengesetzten Richtungen, oder nach der gemeinschaftlichen Richtung MA, auf die Maschine angebracht, diesen das Gleichgewicht halten. Dem zufolge entsteht zwischen ihren Momenten die Gleichung:

$$Pa = Qb + \frac{d\gamma}{2gdt}(Pa^2 + Qb^2 + Mh^2),$$

mithin wird: $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g\,(Pa - Qb)}{Pa^2 + Qb^2 + Mh^2}$,

woraus sich die Geschwindigkeiten v und u der beyden Massen P und Q unmittelbar ergeben.

§. 245.

1. Die Masse P wird durch ihr Gewicht, das ebenfalls $= P$ ist, herabwärts getrieben: sinkt aber nur mit einer Kraft $= \frac{Pdv}{2gdt}$, und wird also durch die Kraft

$P\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right)$ zurückgehalten; folglich das Seil, woran sie befestigt ist, mit eben der Stärke gespannt.

2. Die Masse Q steigt dagegen mit einer Kraft $= \frac{Qdu}{2gdt}$ aufwärts. Also hat das Seil, woran sie hängt, nicht allein ihr ganzes Gewicht zu tragen, sondern auch noch die Masse selbst mit jener Kraft hinaufzuziehen, und seine Spannung ist daher $= Q\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$.

3. Durch die beyden Spannkräfte, so wie durch das Gewicht M der Maschine, entsteht also ein vertikaler Druck der Zapfen gegen ihre Lager $= M + P + Q - \frac{d\gamma}{2gdt}(Pa - Qb)$, und daraus ein Widerstand der Reibung, der gegen die Axe das Moment

$$\lambda e \left[P + Q + M - \frac{d\gamma}{2gdt}(Pa - Qb)\right]$$

hat, wenn wiederum der Halbmesser des Zapfen e genannt wird.

4. Man bekommt also jetzt statt der Gleichung §. 244. 4. folgende:

$$Pa = Qb + \lambda e(P + Q + M) + \frac{d\gamma}{2gdt}\left[Pa^2 + Qb^2 + Mh^2 - \lambda e(Pa - Qb)\right]$$

und daraus

$$\frac{d\gamma}{2gdt} = \frac{Pa - Qb - \lambda e(P + Q + M)}{Pa^2 + Qb^2 + Mh^2 - \lambda e(Pa - Qb)}$$

§. 246.

Hängen die beyden Massen P und Q an einem gemeinschaftlichen Seile, das über eine Rolle geht, so hat man $b = a$, und für beyder Geschwindigkeit $v = a\gamma$. Daher wird in diesem Falle

$$v = \frac{2gt \,.\, [(P - Q)\, a - \lambda e\, (P + Q + M)]}{(P + Q + \frac{1}{2} M)\, a - \lambda e\, (P - Q)}$$

und, wenn man den Raum, durch den die Masse P in der Zeit t herabsinkt, oder Q heraufsteigt, = x nennt:

$$x = \tfrac{1}{2}\, vt.$$

Da die Friktion, wie jeder andere Widerstand, kein Gleichgewicht aufhebt, sondern vielmehr die Grenzen, zwischen denen es ohne sie statt finden würde, weiter ausdehnt; so folgt von selbst, daß sich die Formel nur anwenden lasse, wofern die Bewegung möglich, also

$P - Q > \frac{\lambda e}{a}\, (P + Q + M)$ ist. Widrigenfalls würde man die Friktion als aktive Kraft ansehen, wo sie bloß verhindert, daß die Bewegung wirklich erfolge.

Ist nun aber $P - Q > \frac{\lambda e}{a} \,.\, (P + Q + M)$, so hat sie offenbar einen desto beträchtlichern Einfluß auf die Bewegung, je größer jede der beyden Massen P und Q an sich, und je kleiner ihr Unterschied ist; woraus erhellet, daß sich ihr Koefficient λ durch Versuche mit Gewichten, die dazu vortheilhaft gewählt sind, mit vieler Genauigkeit bestimmen lassen müsse. Zu dem Ende erhält man aus vorhergehender Formel, wenn man darin den Fallraum x als gegeben ansieht:

$$\lambda = \frac{a}{e} \cdot \frac{gt^2(P-Q) - x(P+Q+\tfrac{1}{2}M)}{gt^2(P+Q+M) - x(P-Q)}.$$

§. 247.

Exempel. Bey den Versuchen, die uns Herr **Schober** in seiner Theorie der Ueberwucht mitgetheilt hat, war der vorgezeichnete Fallraum $x = 54$ paris. Fuß; die Rolle hatte $2\frac{1}{6}$ Zoll im Durchmesser, und wog sammt ihrer stählernen Axe, die auf geröstetem Horn lief, und $\frac{1}{12}$ Zoll dick war, $1\frac{3}{8}$ Loth. Die beyden Gewichte hingen an einer Schnur ohne Ende, 8 Loth schwer, wovon sich also auf verschiedenen Seiten der Rolle beständig gleiche Hälften befanden. Das kleinere Gewicht betrug 64 Loth; dazu das Gewicht der halben Schnur addirt, giebt $Q = 68$ Loth. Das Uebrige ersieht man aus folgender Tafel:

Gewicht P in Loth	$= 69\frac{1}{2}$	70	$70\frac{1}{2}$	71	$71\frac{1}{2}$	72
Beob. Zeit t in Sec.	$= 31$	23	18	15	14	13

Was den ersten Versuch betrift, so wird:

$$\log .\ gt^2 = 4{,}1616372$$
$$\log .(P+Q+M) = 2{,}1426242$$

$$\log .\ gt^2(P+Q+M) = 6{,}3042614$$
$$gt^2(P+Q+M) = 2014935$$
$$x(P-Q) = 81$$

$$\text{Nenner} = 2014854$$
$$\text{dessen Log.} = 6{,}3042436$$

Ferner $\log . gt^2 = 4,1616372$

$\log . (P - Q) = 0,1760913$

$\log . gt^2 (P - Q) = 4,3377285$

$gt^2 (P - Q) = 21763,479$

$x (P + Q + \frac{1}{2} M) = 7462,125$

Zähler $= 14301,354$

dessen Log. $= 4,1553772$

dazu $\log . \frac{a}{e} = 1,4149738$

addirt, giebt . . 5,5703505

und hiervon . . 6,3042436

subtr. bleibt $\log \lambda = 0,2661069 - 1$

also . . . . . $\lambda = 0,18454$

Eben so giebt der zweyte Versuch $\lambda = 0,19514$

der dritte . . . $\lambda = 0,17913$

der vierte . . . $\lambda = 0,14470$

der fünfte . . . $\lambda = 0,17390$

der sechste . . . $\lambda = 0,18816$

und wenn man aus diesen Werthen, mit Weglassung des vierten, der von den übrigen zu sehr abweicht, ein Mittel nimmt, bekommt man $\lambda = 0,184$.

Herr Schober bemerkt a. a. O. daß zur bloßen Aufhebung der Friktion eine Ueberwucht von 1 Loth erforderlich war. Setzt man nun diesem zufolge in der Formel fürs Gleichgewicht:

$$P - Q = \frac{\lambda e}{a} . (P + Q + M)$$

$P = 69$ Loth, $Q = 68$ Loth, und wie vorhin $M = 1\frac{3}{8}$

Loth, $\frac{e}{a} = \frac{1}{26}$, so erhält man dadurch $\lambda = 0{,}188$. Hieraus bestätigt sich, was wir schon in der Statik bey Betrachtung der Friktionsgesetze erinnert haben, daß bey Axen, die in Lagern sich drehen, die Friktion der Ruhe und der Bewegung ziemlich genau mit einander übereinkommen.

§. 248.

Stat. Fig. 49. **Aufgabe.** Ein Tretrad, an dessen Welle die Last P hängt, soll durch einen Menschen, der sich innerhalb desselben befindet, in Bewegung gesetzt werden. Sein körperliches Gewicht $= G$, und die Winkeldistanz $oCB = \eta$ seiner mittlern Stelle o von der Vertikale ACB, sind gegeben; man sucht die Umdrehung des Rades und das Fortrücken der Last.

Aufl. 1) Man nenne den Halbmesser des Rades $= a$, den der Welle $= b$, das Moment der Trägheit der ganzen Maschine in Bezug auf ihre Axe $= Mh^2$, ihre Winkelgeschwindigkeit für eine gegebene Zeit $t = \gamma$, die Aenderung derselben im nächsten Zeittheilchen $dt = d\gamma$.

2) Wäre die Maschine im freyen Zustande, so würde ihre Beschleunigung eben so durch eine Kraft erfolgen, die gegen ihre Axe das Moment $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ hätte.

3) Die Geschwindigkeit der Last ist $= b\gamma$ nach aufwärts gehender vertikaler Richtung, und der Zuwachs derselben im nächsten $dt = bd\gamma$. Stände also

die Last mit dem Rade in keiner Verbindung, und wäre bloß als träge Masse anzusehen, so gehörte zu ihrer Bewegung eine Kraft $= \frac{Pb}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und diese hätte gegen die Axe das Moment $= \frac{Pb^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

4) Da die Stelle des Menschen unveränderlich dieselbe bleibt, so bedürfte es, um seine körperliche Masse daselbst in Ruhe zu lassen, gar keiner Kraft; daher ist zu ihrer Bewegung, wenn wir sie nus als frey und ohne Gewicht denken, die erforderliche Kraft $= 0$.

5) Die Kräfte, die das Rad wirklich in Bewegung setzen, sind: Das Gewicht des Menschen $= G$, und die Last P; ihre Momente gegen die Axe $= Ga \operatorname{Sin} \eta$, und Pb. Werden nun zu diesen Kräften die erstern beyden (2. 3.) nach entgegengesetzten Richtungen hinzugefügt, und die Momente derer, die das Rad nach einerley Seite zu drehen streben, zusammenaddirt, so entsteht die Gleichung:

$$Ga \operatorname{Sin} \eta = Pb + \frac{d\gamma}{2gdt}(Pb^2 + Mh^2).$$

6) Diese giebt: $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g\,(Ga \operatorname{Sin} \eta - Pb)}{Pb^2 + Mh^2}$, woraus dann das Uebrige leicht gefunden wird.

§. 249.

Will man hierbey zugleich die Friktion in Rechnung bringen, so geschieht dies folgendermaßen:

1) Die Spannung des Seiles, woran die Last

hängt, ist $= (1 + \frac{bd\gamma}{2gdt})P$. Durch den Theil P derselben wird nemlich die Geschwindigkeit der Last $v = b\gamma$ bloß **erhalten**; durch den andern Theil $\frac{Pbd\gamma}{2gdt}$ hingegen, wird sie in jedem folgenden Augenblicke um $dv = bd\gamma$ **vermehrt**.

2) Diese Spannung, nebst den Gewichten G und M des Menschen und der Maschine, bewirken zusammen einen vertikalen Druck der Zapfen gegen die Lager $= P(1 + \frac{bd\gamma}{2gdt}) + G + M$, welcher mit dem Reibungskoefficienten λ multiplicirt, die daraus entstehende Friktion giebt.

3) Da sie am Umfange des Zapfen geschieht, so ist ihr Moment gegen die Axe, wenn man den Halbmesser des Zapfen e nennt, $= \lambda e [P(1 + \frac{bd\gamma}{2gdt}) + G + M)$. Dies zu den übrigen Momenten auf der rechten Seite der Gleichung (§. 242. 5.) noch hinzu gefügt, giebt nunmehr:

$$\text{Ga Sin } \eta = Pb + \lambda e(G + P + M) + \frac{d\gamma}{2gdt}(Pb^2 + Mh^2 + \lambda Peb)$$

woraus

$$\frac{d\gamma}{2gdt} = \frac{\text{Ga Sin } \eta - Pb - \lambda e(G + P + M)}{Pb^2 + Mh^2 + \lambda Peb} \text{ wird.}$$

§. 250.

Stat. Fig. 52. **Aufgabe.** In das Getriebe aeO eines Rades AEF greift ein anderes Rad OGB ein, woran eine Welle gb befindlich ist. Um diese ist ein Seil gewunden, an dessen herabwärts gehendes Ende ein Gewicht P gehängt wird. Man fragt, wie dasselbe nach und nach sinken, und die Räder in Umlauf setzen werde.

Aufl. Es sey der Halbmesser des ersten Rades $AC = a$, der seines Getriebes $CO = e$, das Moment der Trägheit beyder für ihre Axe $= Mh^2$; der Halbmesser des letztern Rades $DB = b$, der seiner Welle $Db = f$, ihr gemeinschaftliches Moment der Trägheit in Ansehung ihrer Axe $= Nl^2$. Endlich sey noch die Geschwindigkeit des Gewichtes P für eine gegebene Zeit $t = v$, ihre Aenderung im nächsten $dt = dv$, so ist

1) die zu dieser Beschleunigung erforderliche Kraft nach vertikal herabwärts gehender Richtung $= \frac{Pdv}{2gdt}$.

2) Ferner die Winkelgeschwindigkeit ω des nächsten Rades $= \frac{v}{f}$, und ihr Wachsthum im folgenden dt $= d\omega = \frac{dv}{f}$; also das Moment der Kraft, die diese Wirkung auf das Rad hervorbrächte, wenn es mit der Last und dem andern Rade nicht zusammenhinge $= \frac{Nl^2}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{Nl^2}{2gf} \cdot \frac{dv}{dt}$; und sie selbst, auf den Umfang der Welle angebracht, $= \frac{Nl^2}{2gf^2} \cdot \frac{dv}{dt}$.

3) Da der Punkt O in dem Umfange des eben betrachteten Rades und des dareingreifenden Getriebes einerley Geschwindigkeit hat, so wird, wenn wir die Winkelgeschwindigkeit des letztern, oder des zu ihm gehörigen Rades AEF $= \Upsilon$ nennen, $e\Upsilon = b\omega$; folglich $\Upsilon = \frac{b\omega}{e} = \frac{bv}{ef}$, $d\Upsilon = \frac{bdv}{ef}$; mithin das Moment der Kraft, die zur Umtreibung desselben nöthig wäre, wenn es im abgesonderten Zustande eben die Bewegung erhalten sollte, $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\Upsilon}{dt} = \frac{Mh^2b}{2gef} \cdot \frac{dv}{dt}$, und die Kraft selbst, auf seinen Umfang reducirt, $= \frac{Mh^2b}{2gefa} \cdot \frac{dv}{dt}$.

4) Diese drey Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf ihre Punkte b und A angebracht, müssen also der Last P das Gleichgewicht halten; daher bekommt man zwischen ihnen folgende Gleichung:

$$\frac{Mh^2b}{2gefa} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{ef}{ab} \left[P - \frac{dv}{2gdt}\left(P + \frac{Ml^2}{f^2}\right)\right].$$

woraus $\frac{dv}{dt} = \frac{2gPe^2f^2}{Pe^2f^2 + Mh^2b^2 + Nl^2e^2}$ folgt.

Gleichförmige Bewegung bey Maschinen.

§. 251.

Die Kräfte, die man zur Betreibung einer Maschine anwendet, sind selten, wie in den bisher betrachteten Fällen, unveränderlich; sondern meistentheils von der Art, daß sie mit zunehmender Geschwindigkeit der von ihnen angegriffenen Punkte entweder an Wirkung, oder an absoluter Größe verlieren, und sich auf solche Weise mit der Last, oder dem Widerstande, den sie zu überwinden haben, zuletzt ins Gleichgewicht setzen. Bevor dies geschieht, ist die Geschwindigkeit der Maschine einem steten Wachsthum unterworfen, der aber in gleichem Maaße, wie die Ueberwucht der Kraft sich vermindert, nach und nach abnimmt, und am Ende, wenn Kraft und Last ins Gleichgewicht treten, gänzlich verschwindet; da dann die Geschwindigkeit bey einer gewissen Grenze, die sie erreicht hat, stehen bleibt, und die ganze Maschine in dem einmal erhaltenen Gange gleichförmig beharret.

§. 252.

Zur Erläuterung dieses, für die Ausübung so wichtigen Satzes, wollen wir beym Tretrade §. 248. annehmen, die Last P, die durch den Menschen aufgewunden werden soll, sey gegeben, so wird dadurch die Stelle o bestimmt, wo er stehen muß, um selbiger das Gleichgewicht zu halten; man hat nemlich in diesem Betracht:

$$Ga \sin \eta = Pb, \text{ mithin}$$

$$\sin \eta = \frac{Pb}{Ga}.$$

Diese Stelle darf er nun Anfangs nicht betreten, wofern das Rad durch ihn wirklich in Umlauf gebracht, und die Last gehoben werden soll, sondern sein Standpunkt muß für jetzt noch höher hinauf, etwa in m, fallen, so daß der Winkel mCB, den wir η' nennen wollen, größer als η ist. Alsdann wird (§. 248. 6.).

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g\,(Ga \operatorname{Sin} \eta' - Pb)}{Pb^2 + Mh^2}.$$

So lange demnach der Winkel η' einerley bleibt, wächst die Geschwindigkeit des Rades gleichförmig, und kann also so groß werden, wie man will. Dazu gehört aber nothwendig, daß der Arbeiter sich längs der schiefen Fläche seines Standortes beständig mit eben der Geschwindigkeit $a\gamma$ fortbewege, womit die Stuffen unter seinen Füßen ausweichen, oder, welches dasselbe ist, daß er fortwährend mit der Geschwindigkeit $a\gamma \operatorname{Sin} \eta'$ vertikal in die Höhe steige. Setzen wir nun, daß innerhalb der Stellen o und m, deren Inklination doch nicht sehr verschieden seyn kann, die vertikale Geschwindigkeit, die er nach Maaßgabe seiner Kräfte anzunehmen vermag, allenthalben $= c$ sey, so folgt, daß nach einiger Zeit $a\gamma \operatorname{Sin} \eta' = c$ werden, und sodann der Winkel η' in eben dem Verhältnisse abnehmen müsse, als γ fernerhin anwächst.

Man substituire jetzt in obiger Formel für $\operatorname{Sin} \eta'$ seinen Werth $\frac{c}{a\gamma}$, so bekommt man:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g}{Pb^2 + Mh^2} \cdot \left(\frac{Gc}{\gamma} - Pb\right).$$

Indem also die Geschwindigkeit des Rades größer wird, nimmt ihr Wachsthum $d\gamma$ fortdauernd ab, und verschwindet zuletzt, nachdem $\frac{Gc}{\gamma} = Pb$ geworden ist, gänzlich. Hieraus ergiebt sich für den Beharrungszustand: $\gamma = \frac{Gc}{Pb}$, und $\text{Sin}\,\eta' = \frac{c}{a\gamma} = \frac{Pb}{Ga} = \text{Sin}\,\eta$, $\eta' = \eta$, d. h. die gleichförmige Bewegung der Maschine nimmt ihren Anfang, wenn der Mensch zu derjenigen Stelle zurückgekommen ist, wo er der Last das Gleichgewicht halten würde, wenn sich dieselbe noch in Ruhe befände.

§. 253.

Im Beharrungszustande einer Maschine hält nicht allein die Kraft, die zu ihrer Betreibung gebraucht wird, der Last und den Nebenhindernissen das Gleichgewicht, sondern das beträchtlichste dieser Hindernisse, die Friktion, ist auch genau von eben der Größe, als wenn die Maschine in Ruhe wäre.

Beweis. 1) Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, es sey nur eine feste Axe an der Maschine befindlich; aus der Folge unserer Schlüsse wird man leicht wahrnehmen, daß sie mit eben dem Rechte gelten müssen, es mögen der Axen so viele, als man will, vorhanden seyn. Unter dieser Voraussetzung sey nun die bewegende Kraft $= V$; die Last, die dadurch in eine fortrückende Bewegung gesetzt wird, $= P$, ihre Geschwindigkeit für eine gegebene Zeit $t = v$; das Moment der Trägheit aller der Theile, die sich um die Axe drehen, in Bezug auf dieselbe $= Mh^2$, ihre Winkelgeschwindigkeit für eben die Zeit $= \gamma$; die Friktion nebst andern Hindernissen, auf einerley Punkt reducirt, $= R$.

2) Sollte die Bewegung ohne den Einfluß der Kraft und des Widerstandes eben so erfolgen, wie sie hier von den einzelnen Stücken der Maschine angegeben ist, so müßte die Last P nach ihrer Richtung in jedem Augenblicke durch eine Kraft $= \frac{Pdv}{2gdt}$ getrieben, und die Maschine zu gleicher Zeit von einer andern Kraft, die gegen ihre Axe das Moment $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ hätte, gedrehet werden.

3) Diese beyden Kräfte wären also in Verbindung den gegebenen V, P und R für jeden Zeitpunkt der Bewegung äquipollent, und müßten folglich, nach entgegengesetzten Richtungen angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

4) Sobald aber die Bewegung in den Beharrungszustand kommt, werden v und γ beständige Größen; folglich ihre Aenderungen dv und $d\gamma$, und mit ihnen $\frac{Pdv}{2gdt}$ und $\frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, $= 0$; woraus erhellet, daß sodann V, P und R noch unter sich allein im Gleichgewichte seyn müssen.

5) Außer dem **beständigen** Drucke M, den die Axe durch das eigene Gewicht der Maschine leidet, kommt während der Bewegung noch der **veränderliche** Druck in Betracht, der durch Kraft und Last auf sie hervorgebracht wird. Was die Last betrifft, so spannt solche das Seil, woran sie befestigt ist, durch ihre Ge-

schwindigkeit v mit einer Gewalt $= (1 \pm \frac{dv}{2gdt})$ P, je nachdem sie sich aufwärts, oder herabwärts bewegt, und übt dadurch einen Druck auf die Axe aus, der dieser Spannung gleich ist. Wird nun die Bewegung gleichförmig, also $dv = 0$, so verwandelt sich jener Druck in das bloße Gewicht P, und die Friktion, die von der Last herrührt, wird alsdann eben so groß, als für den Fall, wenn die Last ruhig hinge. Ein Gleiches gilt endlich auch vom andern Theile der Friktion, der durch die Kraft V bewirkt wird; weil dieselbe im Beharrungszustande eben die Größe hat, als im Zustande der Ruhe.

§. 254.

Die verschiedenen Hindernisse, die durch den Gang der Maschine veranlaßt werden, kann man insgesammt auf einen einzigen Punkt derselben zurückführen, und wenn man dazu eben den Punkt nimmt, worauf die Last wirkt, so lassen sie sich in Verbindung als einen Theil der Last ansehen, in welchem Betracht sie dann auch unter dem gemeinschaftlichen Namen der **Nebenlast** begriffen werden. Es ist daher hinreichend, bey jeder Maschine, sie mag eingerichtet seyn, wie man will, überhaupt zwey Kräfte anzunehmen: eine bewegende Kraft, die zu ihrer Betreibung angewandt wird, und einen Widerstand, der sich der erstern entgegensetzt, und die Bewegung zu verzögern strebt; es sey dieser nun eine wirkliche Last, die gehoben werden soll, oder ein bloßes Hinderniß, als Reibung, Widerstand der Luft und dergl. oder bestehe aus beyden zugleich. Die Stelle, worauf die bewegende Kraft angebracht wird, heißt nach dem eingeführten Sprachgebrauche der angegriffene Punkt, und die, worauf die Last zunächst wirkt, oder eine ihr äquipollente Kraft hinverlegt ist, der leidende Punkt der Maschine.

§. 255.

Da im Beharrungszustande der Bewegung, Kraft und Widerstand einander das Gleichgewicht halten, so folgt nach dem Grundsatze der virtuellen Geschwindigkeiten (Statik Kap. XI.); **daß das Produkt aus der bewegenden Kraft in die Geschwindigkeit des angegriffenen Punktes dem Produkte aus dem Widerstande in die Geschwindigkeit des leidenden Punktes gleich seyn müsse.** Man nenne nemlich die erstere Kraft $= P$, letztere $= Q$; die Geschwindigkeiten der beyden Punkte, worauf sie wirken, v und u, und die augenblicklichen Wege, die diese Punkte nach ihren Richtungen durchlaufen, dp und dq; so hat man $Pdp = Qdq$, und $v = \frac{dp}{dt}$, $u = \frac{dq}{dt}$, mithin $Pv = Qu$.

§. 256.

Der **absolute Effekt**, oder der **Nutzen**, den eine Maschine leistet, richtet sich theils nach der Größe der Last, die durch sie gehoben wird, oder des Widerstandes, den sie zu überwältigen hat, theils aber auch nach der Höhe, zu der sie die Last hinaufhebt, oder dem Raume, durch den sie den Widerstand fortschiebt, und steht mit beyden Größen im geraden Verhältnisse; oder, wenn Q den Widerstand, q seinen zurückgelegten Weg bedeutet, so ist der absolute Effekt der Maschine dem Produkte Qq proportional.

Je größer nun dieser in einer bestimmten Zeit t ist, oder umgekehrt; je weniger Zeit die Maschine braucht, um eben den Effekt hervorzubringen, desto wirksamer muß sie ohne Zweifel seyn. Man kann also sagen: der **relative** Effekt oder die **Wirksamkeit** einer Maschine stehe im geraden Verhältnisse ihres absoluten Effektes, und im verkehrten Verhältnisse der Zeit, die sie auf ihn verwendet; oder, wenn man sich der Zeichensprache bedient: sie verhalte sich wie der Quotient $\frac{Qq}{t}$.

§. 257.

Wegen der gleichförmigen Bewegung der Maschine im Beharrungszustande ist nun $\frac{q}{t} = u$, mithin $\frac{Qq}{t} = Qu$; daher wird auch eben so gut ihre Wirksamkeit durch das Produkt Qu, oder das ihm gleichgeltende Pv, dargestellt, das man gewöhnlich schlechthin ihren Effekt zu nennen pflegt. Es läßt sich aus seiner Größe, wie nun von selbst erhellet, beurtheilen, ob die Maschine mehr oder minder vortheilhaft eingerichtet sey, und was für Aenderungen mit ihr vorgenommen werden können, die man als wahre Verbesserungen derselben ansehen darf.

Indeß bemerkt Herr **Langsdorf** a. m. O. s. Maschinenlehre sehr richtig, daß in der Größe Q die eigentliche Last, die er deswegen auch Nutzlast nennt, mit der Nebenlast, oder den Hindernissen der Maschine vermengt sey, und daß daher nicht allemal bey derjenigen Einrichtung der Maschine, wofür Qu oder P*v* ein Maximum ist, auch zugleich ihr **wahrer** Effekt der möglichst größte seyn werde. Man kann sich hier, wie mich dünkt, vor allem Irrthum sichern, wenn man Anfangs die zu fördernde Last als gegeben ansieht, und daraus das, was an der Maschine veränderlich seyn darf, so zu bestimmen sucht, daß die Geschwindigkeit der Last am größten wird; dann aber auch die Last selbst als veränderlich annimmt, und nun berechnet, wie groß sie seyn müsse, damit das Produkt aus ihr in die Geschwindigkeit derselben, oder der eigentliche Effekt der Maschine ein Maximum werde. Ich will davon folgendes Beyspiel geben.

§. 258.

Fig. 31. **Aufgabe.** An dem wagerechten Arme DF einer stehenden Welle AB soll ein Pferd ziehen, und dadurch eine Last aufwinden, von der ein Seil über die Rolle K zum Umfange der Welle geht. Man fragt, für welche Last und Länge des Armes sein Zug am wirksamsten sey.

Aufl. Es sey die zu hebende Last . . . $= O$
die Kraft, die das Thier anwenden muß . $= P$
seine absolute Kraft, wenn es in Ruhe ist $= K$
seine größte Geschwindigkeit . . . . . $= c$
das Gewicht der Welle AB . . . . . . $= G$
ihre Winkelgeschwindigkeit im Beharrungszustande . . . . $= \gamma$
ihr Halbmesser . . . . $= a$
der Halbmesser ihres Zapfens . . . . . $= e$
die gesuchte Länge des Hebelarmes DF . $= f$
der Halbmesser der Rolle . . . . $= b$
der ihrer Axe . . . . $= i$
der Reibungskoefficient . . . . $= \lambda$

1) So hat man zuvörderst, wenn die gesammte Friktion, auf den Umfang der Welle reducirt, $= F$ genannt wird:

$$Pf = (O + F)\, a$$

und weil die Geschwindigkeit des Pferdes $= f\gamma$ ist,

$$P = K\left(1 - \frac{f^2\gamma^2}{c^2}\right) \text{ (§. 157.), mithin}$$

$$Kf\left(1 - \frac{f^2\gamma^2}{c^2}\right) = (O + F)\, a.$$

2) Was die Friktion betrift, so ist diese an gegenwärtiger Maschine von dreyfacher Art. Theils entsteht sie nemlich an dem Umfange des Zapfen durch den Seitendruck, den Kraft und Last auf die Welle ausüben, theils am Boden des Zapfen durch das Gewicht der Welle: endlich aber auch an der Axe der Rolle durch die Spannung des darüber gehenden Seiles.

3) Erstere kann nur allein nach dem Drucke O der Last geschätzt werden, da die Kraft durch ihre veränderliche Richtung bald einen Druck, der mit jenem zusammenfällt, bald einen entgegengesetzten veranlaßt. Dem zufolge ist also ihr Moment $= \lambda e O$, und eine ihr äquipollente Last, auf den Umfang der Welle angebracht, $= \frac{\lambda e O}{a}$.

4) Die Friktion am Boden des Zapfen hat das Moment $= \frac{2}{3} \lambda e G$, und giebt also auf eben den Punkt reducirt, eine Last $= \frac{2 \lambda e G}{3a}$.

5) Die Spannung des Seiles ist $= O$, und bewirkt also, wenn man den Winkel, worin das Seil an der Rolle gebogen ist, zu 90° annimmt, einen mittlern Druck auf ihre Axe $= \sqrt{2O^2} = O\sqrt{2}$. Daher ist das Moment der Friktion an diesem Theile der Maschine $= \lambda i O \sqrt{2}$, und sie selbst auf den Umfang der Rolle, oder den leidenden Punkt reducirt, $= \frac{\lambda i}{b} . O\sqrt{2}$.

6) Alle drey Hindernisse addirt, geben demnach $F = \lambda O \left(\frac{e}{a} + \frac{i}{b}\sqrt{2}\right) + \frac{2\lambda e G}{3a}$, worin wir der Kürze wegen $\frac{e}{a} + \frac{i}{b}\sqrt{2} = n$ setzen wollen. Wird nun dieser Werth für F in (I) substituirt, so erhält man

$$Kf\left(1 - \frac{f'\gamma^2}{c^2}\right) = Oa\,(1 + n\lambda) + \tfrac{2}{3}\lambda e G$$

eine Gleichung, in der bloß O, f und γ als veränderliche Größen enthalten sind.

7) Man sehe zuerst O als gegeben an, und suche den Werth von f, wofür γ ein Maximum wird. Dies geschieht, indem man die Gleichung nach f differenziirt, und dabey γ wie eine beständige Größe betrachtet; daher wird:

$$K\left(1 - \frac{3f^2\gamma^2}{c^2}\right) = 0,$$

$$\text{mithin } \gamma^2 = \frac{c^2}{3f^2},$$

und wenn damit γ^2 aus der Gleichung (6) weggeschaft wird, so kommt:

$$\tfrac{2}{3}Kf = Oa(1 + n\lambda) + \tfrac{2}{3}\lambda eG,$$

$$\text{woraus } f = \frac{3Oa(1 + n\lambda)}{2K} + \frac{\lambda eG}{K} \text{ folgt.}$$

8) Nachdem man auf solche Art das vortheilhafteste Verhalten der Hebelslänge f zur Last O gefunden hat, nehme man nun ferner auch leztere als veränderlich an, und suche sie so zu bestimmen, daß der Effekt der Maschine, oder das Produkt $Oa\gamma$ aus der Last in ihre Geschwindigkeit $a\gamma$ ein Maximum wird. Zu dem Ende hat man:

$$\gamma = \frac{c}{f\sqrt{3}} = \frac{2Kc\sqrt{3}}{9Oa(1 + n\lambda) + 6\lambda eG}$$

$$\text{also } Oa\gamma = \frac{2KOac\sqrt{3}}{9Oa(1 + n\lambda) + 6\lambda eG},$$

wovon nun das Differenzial, nach O genommen, $= 0$ gesetzt werden müßte. Allein man sieht schon vorläufig, daß diese Größe, wenn man darin O wachsen läßt, ebenfalls beständig zunimmt, und also keines Maximums fähig ist. Sie nähert sich aber mit wachsendem O unendlich einer Grenze $= \frac{2Kc\sqrt{3}}{9(1+n\lambda)}$.

9) Hieraus folgt demnach: daß der Effekt dieser Maschine bey jeder Einrichtung, die man ihr geben kann, stets kleiner sey, als $\frac{2Kc\sqrt{3}}{9(1+n\lambda)}$, aber dieser Grenze desto näher komme, je größer man die Last, und folglich auch die Länge des Hebelarmes annimmt.

Es sey z. B. der Halbmesser der Welle mit Inbegriff der halben Dicke des Seiles, oder $a = 9$ Zoll, $b = 7$ Zoll, e und $i = \frac{1}{2}$ Zoll, $K = 400$ ℔, $c = 12$ Fuß, $\lambda = \frac{1}{8}$; so erhält man $1 + n\lambda = 1{,}0261$, und für den größten Effekt $0{,}3849 \cdot \frac{Kc}{1+n\lambda} = 1804{,}7$ ℔. Ferner sey nun die gegebene Last $O = 3000$ ℔, das Gewicht der Welle $G = 600$ ℔, so wird die vortheilhafteste Länge des Hebelarmes $f = 8{,}661 + 0{,}01 = 8{,}67$ Fuß, oder beynahe $8\frac{2}{3}$ Fuß; $\gamma = 0{,}8$; also die Geschwindigkeit der Last $a\gamma = 0{,}6$ Fuß, und der Effekt $Oa\gamma = 1800$ ℔.

Berechnung einer Roßmühle.

§. 259.

Die Figur 31. zeigt den einfachen Bau dieser Maschine, von deren Einrichtung ich nur das Wesentlichste, was nemlich zur richtigen Beurtheilung derselben allein hinreicht, hier anzuführen für nöthig achte. Durch die stehende Welle AB, die man den **Mühlbaum** nennt, gehen horizontale Arme DF, die, wie beym Göpel, durch vorgespannte Pferde im Kreise fortgezogen werden, und solchergestalt die Welle umdrehen. Ihre Umdrehung setzt ein daran befindliches horizontales Sternrad ECG in Bewegung, das in ein nebenstehendes Getriebe eingreift, und mit diesem zugleich den obern beweglichen Mühlstein oder **Läufer** mn, der mit dem Getriebe an einerley Axe ab, dem **Mühleisen**, befestigt ist, in Umlauf bringt.

§. 260.

Der hauptsächlichste Widerstand, den hier die Kraft zu überwinden hat, und den man mit Herrn **Langsdorf** die Nutzlast nennen könnte, entsteht durch das Zerreiben des Kornes zwischen dem Läufer, und dem untern unbeweglichen Steine pq. Er ist nach den vielfältigen Erfahrungen **Belidor's** *) und anderer sachkundigen Männer von der Geschwindigkeit unabhängig, und läßt sich als eine gewöhnliche Reibung ansehen, die durch den Druck des Läufers hervorgebracht wird, und wofür die Verhältnißzahl $\lambda = \frac{1}{35}$ ausmacht. Diesem zufolge ist sein Moment, wenn man das Gewicht des Läufers $= G$, und seinen Halbmesser $= h$ setzt, $= \frac{2}{3}\lambda Gh = \frac{2}{105} Gh$.

Nennt man nun außerdem den Halbmesser des

*) Architecture hydraulique, §. 654.

Getriebes $= b$, so ist eine ihm äquipollente Kraft, auf den Umfang desselben, oder des damit zusammenstoßenden Rades angebracht, $= \frac{2Gh}{105b}$.

§. 261.

Die übrigen Hindernisse, die nebenbey durch die Maschine selbst veranlaßt werden, sind: das Reiben der stehenden Zapfen von Welle und Mühleisen in ihren Pfannen, und der zusammenstoßenden Zähne von Rad und Getriebe. Um sie zu bestimmen, setze man das

Gewicht der Welle und des Rades . $= M$
das des Mühleisens . . . $= N$
die halbe Dicke ihrer Zapfen . . $= e$ und i,
den Halbmesser des Rades . . $= a$

so giebt die Reibung ersterer Art, auf den Umfang des Rades reducirt, daselbst eine Kraft $= \frac{2}{3}\lambda\left(\frac{Me}{a} + \frac{Ni}{b}\right)$.

Die letztere hingegen hängt von dem in vorigen §. bestimmten Widerstande ab, und ist, wenn man denselben $= R$, und die Winkeldistanz zweyer Triebstöcke $= \eta$ setzt, von o bis zu λR tang $\frac{1}{2}\eta$ veränderlich; also im Mittel $= \frac{1}{2}\lambda R$ tang $\frac{1}{2}\eta$. Außerdem entsteht zwar noch durch die Kraft R tang $\frac{1}{2}\eta$, womit das Rad vom Getriebe gegen die Axe der Welle gedrückt wird, eine Reibung an den Seiten der Zapfen, die aber, auf den Umfang des Rades gebracht, zu der vorhergehenden sich verhält, wie $e : a$, und folglich dagegen in gar keinen Betracht kommt.

Demnach ist der gesammte Widerstand, auf den Umfang des Rades reducirt, $= \frac{2Gh}{105b} (1 + \frac{1}{2}\lambda \text{ tang. } \frac{1}{2}\eta) + \frac{2}{3}\lambda (\frac{Me}{a} + \frac{Ni}{b})$, den wir einstweilen durch F bezeichnen wollen.

§. 262.

Nach dieser vorläufigen Betrachtung sey nun ferner:

die absolute Kraft von allen den Pferden, die zur Betreibung der Mühle gebraucht werden, zusammengenommen . . . . . $= K$,
ihre größte Schnelligkeit . . . . . . $= c$,
die Länge des Hebelarmes DF . . . . . $= f$,
die Winkelgeschwindigkeit des Läufers im Beharrungszustande . . . . $= \omega$,

so ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Umfange des Getriebes oder des Rades $= \omega b$; also die Winkelgeschwindigkeit der Welle $= \frac{\omega b}{a}$, und die Geschwindigkeit der Pferde $= \frac{\omega b f}{a}$, folglich die Kraft, die sie dabey auf den Zug verwenden können, $= K (1 - \frac{\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2})$; mithin

$$Kf (1 - \frac{\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2}) = Fa;$$

woraus die vortheilhafteste Hebellänge f in doppelter

Hinsicht gefunden werden kann. Einmal nemlich, indem man sucht, für welchen Werth von f die Geschwindigkeit ω des Läufers bey gegebener Kraft K ihr Maximum erreicht: dann aber auch, indem man ω als gegeben annimmt, und unter dieser Bedingung f so bestimmt, daß die verlangte Geschwindigkeit ω durch die möglichst kleine Kraft K hervorgebracht wird.

Letztere Voraussetzung ist ohne Zweifel dem Zwecke der Maschine am angemessensten, der bekanntlich, in Hinsicht auf Geschwindigkeit, eine zu schnelle Umdrehung des Läufers durchaus nicht gestattet; dagegen aber mit der möglichsten Ersparung der Kraft recht gut sich vereinigen läßt.

§. 263.

Wir wollen demnach ω als gegeben ansehen, und nun f so zu bestimmen suchen, daß dadurch K ein Minimum wird. Zu dem Ende differenziire man die vorhergehende Gleichung nach f, und nehme dabey, weil $dK = 0$ seyn soll, sowohl ω wie auch K als unveränderlich an. Dies giebt sodann, da f in der Größe F nicht vorkommt:

$$1 - \frac{3\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2} = 0, \text{ also}$$

$$f = \frac{ac}{\omega b\sqrt{3}},$$

woraus nach geschehener Substitution

$$\tfrac{2}{3}Kf = Fa, \text{ oder } K = \frac{3F\omega b\sqrt{3}}{2c} \text{ folgt.}$$

Man substituire noch für F seinen Werth, und setze die Verhältnißzahl $\frac{a}{b} = n$, so erhält man endlich

§ 261. $cK = \frac{\sqrt{3}}{35} . G\omega h \left(1 + \frac{1}{2}\lambda \tang \frac{1}{2}\eta\right) + (neM$
$+ iN) . \lambda\omega\sqrt{3}.$

$$\text{und } f = \frac{nc}{\omega\sqrt{3}}.$$

§. 264.

Um zu sehen, ob zur Verminderung der Kraft auch ein vortheilhafteres Verhältniß zwischen den Halbmessern a und b statt finde, nehme man wieder die anfängliche Gleichung (§. 262.) zu Hülfe, und setze darin statt F seinen Werth (§. 261.), und außerdem $\frac{a}{b} = n$, so wird:

$$Kf\left(1 - \frac{\omega^2 f^2}{n^2 c^2}\right) = \frac{2}{105} nGh \left(1 + \frac{1}{2}\lambda \tang \frac{1}{2}\eta\right)$$
$$+ \frac{2}{3}\lambda\,(eM + niN).$$

Damit nun K ein Minimum werde, differenziire man diese Gleichung nach n, und betrachte dabey die Größen ω, f, wie auch K als beständig, so erhält man ferner:

$$\frac{2K\omega^2 f^3}{n^3 c^2} = \frac{2}{105} Gh \left(1 + \frac{1}{2}\lambda \tang \frac{1}{2}\eta\right) + \frac{2}{3}\lambda iN,$$

und, wenn man das nfache letzterer Gleichung von der erstern subtrahirt:

$$Kf\left(1 - \frac{3\omega^2 f^2}{n^2 c^2}\right) = \frac{2}{3}\lambda eM.$$

Hierin

Hierin noch für f seinen vorhin gefundenen Werth $\frac{nc}{\omega\sqrt{3}}$ gesetzt, giebt endlich:

$$o = \tfrac{2}{3}\lambda eM.$$

Da nun solchergestalt die Zahl n unbestimmt bleibt, und es an sich klar ist, daß die Kraft K unter eben den Umständen am kleinsten seyn müßte, wenn die Friktion der Welle sich gänzlich aufheben ließe; so ist es willkührlich, in welchem Verhältnisse man die Halbmesser a und b annimmt, und die vortheilhafteste Einrichtung der Mühle beruhet also bloß auf folgender Proportion:

$$c : f = \omega\sqrt{3} : n$$

wonach gegenseitig f aus n, und n aus f gefunden werden kann.

§. 265.

Die angemessenste Geschwindigkeit des Läufers wird bey unsern deutschen, flach gehauenen, Mühlsteinen der Erfahrung gemäß zu 24 Rheinl. Fuß am Umfange angenommen. Hiernach würde also $h\omega = 24$, und wenn wir $c = 12$ Fuß setzen:

$$f = \frac{\sqrt{3}}{6} \,.\, nh = 0{,}288675 \,.\, nh,$$

$$K = 2\sqrt{3}\left[\tfrac{1}{35}G\left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \tang \tfrac{1}{2}\eta\right) + \frac{\lambda}{h}(neM + iN)\right].$$

Exempel. Es sey $a = 8$ Fuß, $b = 6$ Zoll, oder $n = 16$; $h = 3$ Fuß, $e = 9$ Lin., $i = 3$ Lin.; $G = 2400$ ℔, $M = 400$ ℔, $N = 200$ ℔; die Anzahl der Triebstöcke $= 12$, also $\eta = 30^\circ$, und endlich $\lambda = \frac{1}{3}$, so erhält man zuvörderst $f = 8\sqrt{3} = 13{,}8564$ Fuß; ferner

$\frac{1}{2}\lambda \tan \frac{1}{2}\eta = 0{,}04466$, $neM + iN = 404\frac{1}{6}$, mithin

$K = 2\sqrt{3}\,(71{,}634 + 44{,}907) = 403{,}71$ ℔,

so daß also ein einzelnes Pferd zur Betreibung der Mühle hinreichend seyn würde.

Vom Widerstande der Luft bey drehender Bewegung.

§. 266.

Fig. 32. **Aufgabe.** Ein Körper dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit γ um die feste Axe AB; man sucht das Moment des Widerstandes, den die Luft auf ein Element $mnpq = dS$ seiner Vorderfläche ausübt.

Aufl. 1) Um die Lage desselben zu bestimmen, fälle man aus einem seiner Punkte m auf die Axe das Perpendikel $mO = w$, und lege durch beyde Linien AB und Om eine Ebene AOm, die die Fläche mnpq in mn schneiden mag. Diese Ebene soll in Zukunft die Axenfläche des Elementes heißen.

2) Man errichte ferner auf mn in der Ebene des Elementes das Perpendikel mp, und fälle aus p auf die Axenfläche noch ein zweytes po, so ist pmo der Neigungswinkel beyder Ebenen, den wir $= I$ setzen wollen, und op die Richtung, nach der sich das Element mit der Geschwindigkeit γw in gegenwärtigem Augenblicke bewegt.

3) Indem dasselbe nach dieser schrägen Richtung fortgeht, liegt offenbar nicht mehr Luftmasse vor ihm, die es aus der Stelle zu treiben hat, als gegen seine Projektion in der Axenfläche mnov $= dS \,.\, \mathrm{Cos}\, I$ senkrecht aufstoßen würde; daher leidet es von der Luft den schiefen Druck $p = \lambda \gamma^2 w^2 \,\mathrm{Cos}\, I dS$.

4) Man zerlege selbigen in zwey Kräfte nach den beyden Richtungen pr und pm, wovon erstere auf die Fläche des Elementes senkrecht, letztere damit parallel ist; so erhält man nach pr den normalen Druck $p \,\mathrm{Cos}\, opr = p \,\mathrm{Cos}\, I$, der nur allein die Bewegung verzögern kann, da der andere Druck nach pm der Luft einen freyen Abfluß gestattet, und folglich seine Wirkung gänzlich verliert.

5) Aus dem normalen Widerstande $p \,\mathrm{Cos}\, I$ entspringt ferner noch eine Kraft nach $po = p \,\mathrm{Cos}\, I \,.\, \mathrm{Cos}\, opr = p \,\mathrm{Cos}\, I^2$, und eine nach $or = p \,\mathrm{Cos}\, I \,\mathrm{Sin}\, I$. Letztere von diesen Kräften drückt nach der schrägen Richtung um gegen die Axe AB, und wird deshalb aufgehoben; erstere hingegen strebt den Körper nach der Richtung po, die der seinigen entgegengesetzt ist, um die Axe zu drehen, und hat gegen sie das Moment $pw \,\mathrm{Cos}\, I^2 = \lambda \gamma^2 w^3 \,\mathrm{Cos}\, I^3 dS$.

§. 267.

1) Wenn man solchergestalt die Momente für alle Elemente der Vorderfläche des Körpers berechnet, und sie in eine Summe zusammenfaßt, so bekommt man das Moment des gesammten Widerstandes, den die

Luft seiner Umdrehung entgegensetzt. Man kann es vorläufig durch das Integral $\lambda\gamma^2\int w^3 \text{Cos I}^3 dS$ ausdrücken.

2) Da die Summe $\int w^3 \text{Cos I}^3 dS$ für jeden bestimmten Körper, der sich um eine gegebene Axe dreht, von beständiger Größe ist, so folgt: **daß das Moment des Widerstandes der Luft dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit des Körpers proportional sey.**

3) Wofern die einzelnen Elemente der Oberfläche des Körpers gegen ihre Axenflächen eine senkrechte Lage haben, so ist allenthalben $\text{Cos I} = 0$, mithin auch $\int w^3 \text{Cos I}^3 dS = 0$; woraus der schon an sich natürliche Satz fließt: daß ein von außen rund geformter Körper, der sich um seine centrale Axe dreht, von dem Widerstande der Luft gänzlich frey sey. Dergleichen Körper sind beym Maschinenwesen z. B. die cylindrischen Wellen, die Kränze der Räder, die Rollen u. a. m.

4) Fallen dagegen die Elemente der Vorderfläche des Körpers insgesammt in eine gemeinschaftliche Axenfläche AOG, so ist durchgängig $\text{Cos I} = 1$, also das Moment des Widerstandes $= \lambda\gamma^2\int w^3 dS$.

5) Von einem Rechtecke, das in diese Axenfläche fällt, und dessen Grundlinie mit der Axe parallel läuft, sey die Breite $= b$, die Höhe FG $= h$, und der Abstand CO seiner Mitte C von der Axe $= f$. Man denke sich die ganze Fläche dieses Rechtecks in lauter unendlich schmale, mit der Axe parallele, Streifen $dS = bdx$ getheilt, und setze für zwey derselben, die bey m und n

gleich weit von C abliegen, $Cm = Cn = x$; so sind ihre Entfernungen Om und On von der Axe $= f + x$ und $f - x$, also die Momente des Widerstandes auf beyde zusammengenommen $= \lambda \gamma^2 b\,(f^3 + 3fx^2)\,dx$, wovon das Integral $= \lambda \gamma^2 bfx\,(f^2 + x^2)$ ist. Hierin $x = \frac{1}{2}h$ gesetzt, giebt das Moment des gesammten Widerstandes auf das Rechteck $= \frac{1}{2}\lambda \gamma^2 fbh\,(f^2 + \frac{1}{4}h^2)$.

6) Erstreckt sich dasselbe bis zur Axe hin, so ist $f = \frac{1}{2}h$, folglich wird alsdann das Moment $= \frac{1}{8}\lambda \gamma^2 bh^3$.

§. 268.

Ist die Oberfläche des Körpers von der Beschaffenheit, daß man sie durch eine Gleichung zwischen dreyen Koordinaten darstellen kann, so läßt sich das Integral $\int w^3 \operatorname{Cos} I^3 dS$ auf folgende Art sehr leicht entwickeln:

Fig. 33. 1) Man ziehe in einer der Axenflächen BAD eine Linie AD nach Gefallen auf die Axe AB senkrecht; fälle aus einem Punkte Z der Oberfläche auf die Ebene BAD das Perpendikel ZY, und aus Y auf AD noch ein zweytes AX; so daß die Lage des Punktes Z auf die drey rechtwinklichten Koordinaten $AX = x$, $XY = y$, und $YZ = z$ zurückgeführt wird.

2) Die Differenziale dx und dy der erstern beyden schließen bey Y ein Rechteck ein, dessen Inhalt $= dxdy$ ist, und wenn man durch dessen Seiten vier Ebenen senkrecht auf die Axenfläche BAD errichtet, so wird dadurch an der Oberfläche des Körpers ein vierseitiges

Element $= dS$ abgeschnitten, wovon das untere Rechteck die gerade Projektion ist.

3) Dies vorausgesetzt, sey Zq die Normale am Punkte Z der Oberfläche, ihre Länge $= r$, so hat man bekanntlich für deren Koordinaten $Ap = x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $pq = y + z\left(\frac{dz}{dy}\right)$; ferner $r = \sqrt{(ZY^2 + Yr^2 + rq^2)}$ $= z\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$, und außerdem dS $= \frac{r}{z} \cdot dxdy$.

4) Man fälle noch aus Z auf die Axe das Perpendikel $ZO = w = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, und errichte aus eben dem Punkte auf ZO in der Ebene OYZ, ein anderes Zn, so ist dies auch auf der Axenfläche AOZ des Elementes dS senkrecht, und macht folglich mit der Normale Zq des letztern eben den Winkel $qZn = I$, unter dem die beyden Flächen selbst gegeneinander geneigt sind.

5) Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke OZY und YZn ist nun:

$$OY : YZ = YZ : Yn,$$

also $Yn = \frac{z^2}{x}$, $nr = z\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{z^2}{x} = z\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{z}{x}\right]$, und da $qr = z\left(\frac{dz}{dy}\right)$, so wird

$$nq = z\sqrt{\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - \frac{2zdz}{xdx} + \frac{z^2}{x^2}\right]}.$$

6) Ferner ist OY : OZ = ZY : Zn,

also $Zn = \frac{wz}{x} = z\sqrt{(1 + \frac{z^2}{x^2})}$, mithin

$$\text{Cos}\, qZn = \text{Cos}\, I = \frac{Zq^2 + Zn^2 - nq^2}{2Zq \,.\, Zn} = \frac{z}{rw}.$$

$[x + z(\frac{dz}{dx})]$.

7) Demnach wird

$$w^3 \text{Cos}\, I^3 dS = (\frac{z}{r})^3 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3 . (\frac{r}{z})\, dxdy$$

$$= (\frac{z}{r})^2 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3\, dxdy,$$

und folglich das Moment des gesammten Widerstandes auf die Fläche des Körpers $= \lambda \gamma^2 \iint (\frac{z}{r})^2 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3\, dxdy$, das nach den veränderlichen Größen x und y so weit genommen werden muß, als sich der Theil der Oberfläche erstreckt, der nach der Seite, wohin die Umdrehung geschieht, der Luft zugekehrt ist.

§. 269.

1. Zu eben dem Resultate wird man auf einem noch weit kürzeren Wege durch folgende Betrachtung geleitet:

Da der Druck der Luft auf das Element dS nach dessen Normale Zq geschieht, und eine Kraft stets einerley Wirkung ausübt, sie mag auf einen Punkt ihrer Richtung hinverlegt werden, wohin man will (Statik Kap. II.); so ist es gleichgültig, ob das gedachte Element in Z, oder in jedem andern Punkte der Normale

Zq sich befindet, wofern nur seine Lage immer senkrecht darauf bleibt. Wir wollen demnach setzen, es läge bey q; so wäre nunmehr die Ebene BAD seine Axenfläche, und sein Neigungswinkel I gegen dieselbe = dem Winkel YZq, den die Normalen beyder Flächen mit einander machen; also $\mathrm{Cos}\, I = \frac{ZY}{Zq} = \frac{z}{r}$. Ferner seine Entfernung von der Axe $= Ap = x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und endlich seine Projektion auf die Ebene BAD $= dS\, \mathrm{Cos}\, I = dxdy$, mithin $w^3\, \mathrm{Cos}\, I^3 ds = w^3\, \mathrm{Cos}\, I^2 dxdy = \left(\frac{r}{z}\right)^2 [x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^3\, dxdy$, wie vorhin.

2. Um die Normale r aus der Formel wegzuschaffen, setze man $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, so wird $r = z\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$. Diesen Werth für r substituirt, giebt das Moment des Widerstandes: $= \lambda \gamma^2 \iint \frac{(x + pz)^3\, dxdy}{1 + p^2 + q^2}$.

§. 270.

Exempel I. Eine Kugel vom Halbmesser = a dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit γ um eine Axe, die von ihrem Mittelpunkte um die Weite = f entfernt liegt; man sucht das Moment des Widerstandes, den die Luft ihr entgegensetzt.

1) Man lasse die Abscissenlinie AD durch ihren Mittelpunkt gehen, und nehme in diesem zugleich den

Anfangspunkt der Abscissen x an, so hat man für die Oberfläche der Kugel die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

welche nach x differenziirt, $x + z\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, oder $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z}$ giebt.

2) Für diese Annahme ist aber die in der Formel mit x bezeichnete Abscisse $Ap = f + x$, folglich das dortige Integral $= \iint \left(\frac{z}{r}\right)^2 [f + x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^3 dxdy$, das sich nach verrichteter Substitution, da außerdem $r = a$ ist, in $\frac{f^3}{a^2} \iint (a^2 - x^2 - y^2)\, dxdy$ verwandelt.

3) Man integrire nun zuerst nach y, so erhält man $[(a^2 - x^2)y - \frac{1}{3}y^3]\, dx$, und darin $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ gesetzt, giebt $\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$, oder, wenn man y in dieser Bedeutung beybehält: $\frac{2}{3}y^3 dx$.

4) Ferner ist $\int y^3 dx = \frac{1}{4}y^3 x + \frac{3}{4}a^2 \int y dx$ (§. 206. 5.), und sowohl für $x = a$, als $x = -a$, $y = 0$, $\int y dx = \frac{1}{4}\pi a^2$; also das Moment des Widerstandes auf das Viertel der vordern Halbkugel $= \lambda\gamma^2 \cdot \frac{2f^3}{3a^2} \cdot \frac{3}{16}\pi a^4 = \frac{1}{8}\lambda\gamma^2\pi a^2 f^3$, und folglich auf die ganze vordere Halbkugelfläche $= \frac{1}{2}\lambda\gamma^2\pi a^2 f^3$.

5) Nennt man die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes $= u$, so wird $u = \gamma f$; also das gefundene Moment auch $= \frac{1}{2}\lambda\pi a^2 u^2 f$. Hieraus erhellet: **daß eine Kugel, die sich um irgend eine feste Axe dreht,**

von der Luft eben den Widerstand leide, als wenn sie mit der Geschwindigkeit, die ihr Mittelpunkt dabey hat, in gerader Linie fortrückte.

§. 271.

II. Es sey die centrale Axe eines Cylinders mit seiner Umdrehungsaxe parallel; ihr Abstand davon $= f$, der Halbmesser des Cylinders $= a$, seine Länge $= b$, und die Winkelgeschwindigkeit desselben $= \gamma$; man sucht das Moment des Widerstandes, den die Luft auf seine Vorderfläche ausübt.

1) Man lasse die Abscissenlinie AD durch den Mittelpunkt seiner Grundfläche gehen, und setze in ihn zugleich den Anfangspunkt der Abscissen x; so hat man, weil x und z die Koordinaten seiner Querschnitte sind:

$x^2 + z^2 = a^2$, folglich $x + z\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

2) Wegen dieser Voraussetzung ist aber wiederum das, was in der Formel x genannt ist, hier $= f + x$; also das Integral $= \iint \left(\frac{z}{r}\right)^2 . [f + x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^3$ $dxdy = \frac{f^3}{a^2} \iint z^2 dxdy$.

3) Da z nicht von y abhängt, so giebt die erste Integration, wobey bloß y als veränderlich betrachtet wird: $\frac{f^3}{a^2} . y \int z^2 dx$, und darin $y = b$ gesetzt, erhält man $\frac{f^3 b}{a^2} \int z^2 dx$.

4) Ferner wird $\int z^2 dx = \int (a^2 - x^2)\, dx = C + a^2 x - \frac{1}{3} x^3$, und da dies für $x = -a$ verschwinden muß, $C = \frac{2}{3} a^3$; also der vollständige Werth von $\int z^2 dx$ für $x = a$, $= \frac{2}{3} a^3 + \frac{2}{3} a^3 = \frac{4}{3} a^3$, und folglich das verlangte Moment des Widerstandes $= \frac{4}{3} \lambda \gamma^2 abf^3$.

§. 272.

III. Der Cylinder stehe auf seiner Umdrehungsaxe senkrecht; seine Höhe sey $= f$, der Halbmesser seiner Grundfläche $= a$, und die Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$. Man fragt nach dem Momente des Widerstandes.

1) Man nehme die Abscissenlinie in seiner centralen Axe, und den Anfangspunkt der Abscissen im Mittelpunkte einer Grundfläche an, so sind jetzt y und z die Koordinaten der Querschnitte, folglich ist $y^2 + z^2 = a^2$, und $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

2) Daher wird das Integral $\iint \left(\frac{z}{r}\right)^2 \left[x + z \left(\frac{dz}{dx}\right)\right]^2 dxdy = \frac{1}{a^2} \iint x^2 z^2 dxdy$.

3) Nun hat man zuvörderst, wie im vorhergehenden Falle, $\int z^2 dy = \frac{4}{3} a^3$; mithin $\frac{1}{a^2} \iint x^3 z^2 dxdy = \frac{4}{3} a \int x^3 dx = \frac{1}{3} a x^4$. Hierin $x = f$ gesetzt, giebt das Moment des gesammten Widerstandes $= \frac{1}{3} \lambda \gamma^2 af^4$.

§. 273.

Da die Umdrehungen um feste Axen stets einerley, und zwar sehr beschränkten, Raum erfordern, sie mögen schnell oder langsam geschehen, so gewähren sie ein weit bequemeres und sicheres Mittel, Beobachtungen über den Widerstand der Luft anzustellen, als das Fallen der Körper, oder andere fortrückende Bewegungen. Dergleichen Versuche beschreibt **Charles Hutton** in den Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh Vol. II. pag. 29., wobey er folgende Einrichtung getroffen hat: Fig. 31. An der stehenden Welle AB ist ein langer horizontaler Hebelarm DF befestigt, und auf dessen äußerstes Ende D der Körper angebracht, womit der Versuch gemacht werden soll. Vom Umfange der Welle geht eine Schnur über die Rolle K zu einem Gewichte, das beym Herabsinken die Schnur abwickelt, und so die Welle umdreht. Anfangs wird nun zwar die Bewegung von dem Gewichte beschleunigt: aber eben dadurch auch der Widerstand der Luft auf die Fläche des Körpers vermehrt, so daß derselbe binnen kurzer Zeit mit dem Gewichte ins Gleichgewicht tritt, und alsdann die fernere Beschleunigung verhindert. Sobald man wahrnimmt, daß dies bereits geschehen sey, wird die Zeit von mehreren Umläufen der Welle mit einer Sekundenuhr beobachtet, und daraus ein Mittel für die Winkelgeschwindigkeit derselben hergenommen. Wir wollen setzen, sie sey in einer Zeit von t Sek. nmal herumgekommen, und ihre Winkelgeschwindigkeit dabey $= \gamma$, so hat man:

$$\gamma : 2n\pi = 1 : t,$$

woraus γ desto richtiger gefunden wird, je mehr Umläufe man zu Hülfe nimmt.

Um die Friktion an der Welle, und den Widerstand der Luft auf den Hebelarm DF in Rechnung zu bringen, wird sowohl der Körper als das Gewicht von der Maschine abgenommen, und nun so viel kleineres Gewicht an die Schnur gehängt, daß dadurch der ledige Arm zuletzt die vorige Geschwindigkeit bekommt. Dies ist nun freylich bey einem einzelnen Versuche schwer zu treffen: aber wenn man deren mehrere nach einander mit verschiedenen Gewichten angestellt hat, so kann man doch für jede verlangte Geschwindigkeit das erforderliche Gewicht durch Interpolation mit ziemlicher Genauigkeit bestimmen.

§. 274.

Es sey nun im Beharrungszustande der Bewegung die Winkelgeschwindigkeit der Welle $= \gamma$, ihr Halbmesser $= b$, das Moment des Widerstandes der Luft auf die vordere Seite des Körpers $= \lambda \gamma^2 M$, auf den Hebelarm $= \lambda \gamma^2 m$, das angehängte Gewicht $= P$, das Moment der dadurch bewirkten Friktion an der Seite des Zapfen $= Pe$, und das Moment der Friktion, die vom Gewichte der Welle herrührt $= Ge$, so erhält man:

$$Pb = \lambda \gamma^2 (M + m) + e(G + P),$$

und wenn p das Gewicht heißt, wodurch der bloße Hebelarm dieselbe Geschwindigkeit γ bekommt, nachdem die Umdrehung gleichförmig geworden ist, so wird ferner:

$$pb = \lambda \gamma^2 m + e(G + p).$$

Dies vom erstern abgezogen, bleibt

$$(P-p)\,b = \lambda\, \gamma^2 M + e\,(P-p)$$

woraus $$\lambda = \frac{(P-p)(b-e)}{M\gamma^2} \text{ folgt.}$$

Herr **Hutton** nahm zu seinen Versuchen eine Halbkugel von Pappe, wovon er bald die Grundfläche, bald die konvexe Seite vorangehen ließ, und so den Widerstand der Luft auf zweyerley Flächen zugleich, die ebene und die sphärische, erhielt. Wir wollen hier nur den letztern Fall betrachten, wofür $M = \frac{1}{2}\pi a^2 f^3$ ist (§. 270.); dies in die vorhergehende Formel substituirt, und ausserdem die Geschwindigkeit des Mittelpunkts der Halbkugel $\gamma f = v$ gesetzt, giebt:

$$\lambda = \frac{2\,(P-p)(b-e)}{\pi a^2 v^2 f}.$$

Ferner war bey ihm die Länge des Arms $f = 53{,}34$ engl. Zoll, der Halbmesser der Halbkugel $a = 3\frac{1}{16}''$, und der Halbmesser der Welle, mit Inbegriff der halben Dicke des Fadens, $b = 1{,}043''$. Die Dicke des Zapfens ist nicht angegeben, sondern nur die Bemerkung gemacht, daß er sich an Friktonsrädern drehete, wodurch also die Seitenfriktion sehr vermindert, und folglich e höchst unbedeutend werden mußte; so daß man es aus der Rechnung sicher weglassen kann. Dies vorausgesetzt, erhält man nun, wenn man a in Rheinl. Fußen ausdrückt, $\log \frac{2b}{\pi a^2 f} = 0{,}2717188 - 1$, und dazu $\log\left(\frac{P-p}{v^2}\right)$ addirt, giebt alsdann $\log \lambda$. Auf solche Art sind für nachstehende Gewichte, und die daraus erfolgten Geschwindigkeiten der Halbkugel die daneben befindlichen Werthe von λ berechnet, die ich aber, wie im Kap. IV. auf rheinl. Fußmaaß und die Gewichtseinheit ℔ bezogen habe:

v Engl. Fuß.	P Unzen.	p Unzen.	P−p Unzen.	λ
10	16,2	3,8	12,4	0,0015352
12	22,6	5,1	17,5	0,0015048
14	30,6	6,5	24,1	0,0015524
16	40,0	7,9	32,1	0,0015223
18	51,0	9,5	41,5	0,0015858
20	64,0	11,0	53,0	0,0016410

Diese Koefficienten stimmen unter sich, wie man sieht, ziemlich genau überein, wiewohl sie von denen, die wir (§. 94.) aus den Hawksbeeschen Versuchen hergeleitet haben, beynahe um ein Fünftel ihres Werthes abweichen: wovon aber die Schuld in Verschiedenheit der Barometerhöhen, ungleicher Temperatur, und andern Nebenumständen sehr wohl liegen kann.

Neuntes Kapitel.

Von den freyen Axen fester Körper.

§. 275.

Fig. 23. Es sey AB eine unbewegliche Axe, um die sich ein fester Körper mit der Winkelgeschwindigkeit γ gleichförmig dreht; Z der Ort eines seiner Elemente, dessen Masse wir $= dM$ setzen wollen, und seine senkrechte Entfernung ZO von der Axe $= r$; so ist die Geschwindigkeit, womit es sich im Kreise um den Punkt O herum bewegt, $= \gamma r$ (§. 197.), und folglich die Schwungkraft, die es dadurch bekommt, $= \frac{\gamma^2 r^2 dM}{2gr}$ (§. 61.) $=$ $\frac{\gamma^2}{2g} . rdM$. Mit dieser Kraft strebt also das Element sich von O zu entfernen, und da dies wegen der Festigkeit des Körpers nicht möglich ist, den Punkt O nach der Richtung OZ mit sich fortzureißen.

Eine ähnliche Kraft wird auf den Punkt O durch jedes andere Element verübt, das sich in der Umdrehungsebene ZOz befindet, und was von diesem einzelnen Punkte der Axe gilt, erstreckt sich auch auf alle übrigen Punkte derselben, so daß die ganze Axe, während der Körper sich um sie dreht, einer beständigen Gewalt ausgesetzt ist, die allein durch die Umdrehung des Körpers und den damit verbundenen Kreislauf seiner einzelnen Elemente bewirkt wird.

§. 276.

§. 276.

Aufgabe. Ein fester Körper von gegebener Gestalt und Größe dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit γ gleichförmig um die Axe IA; man sucht die Kräfte, womit die Axe gehalten werden muß, damit sie nicht aus ihrer Lage rücke.

Fig. 34. **Aufl.** 1) Man errichte aus einem beliebigen Punkte I derselben zwey Linien IB und IC, sowohl unter sich als auf die Axe, senkrecht, und ziehe diesen für ein Element des Körpers bey Z, dessen Masse dM heißen mag, die Koordinaten IX $=$ x, XY $=$ y, YZ $=$ z parallel; so ist ZXY die Umdrehungsebene des Punktes Z, also XZ seine senkrechte Entfernung von der Axe, und wenn diese $=$ r gesetzt wird, seine Geschwindigkeit $= \gamma r$; folglich die Schwungkraft der Masse $dM = \frac{\gamma^2}{2g} . rdM$, die dem Punkt X der Axe nach der Richtung XZ fortzuziehen strebt.

2) Man zerlege sie in zwey andere Kräfte nach den beyden mit IB und IC parallelen Richtungen XY und XV, so erhält man nach XY die Kraft $\frac{\gamma^2}{2g} . rdM . \text{Cos}\, ZXY = \frac{\gamma^2}{2g} . ydM$, und nach XV die Kraft $\frac{\gamma^2}{2g} . rdM\, \text{Sin}\, ZXY = \frac{\gamma^2}{2g} . zdM$.

3) Auf solche Art entspringen also aus allen den Schwungkräften der einzelnen Elemente im Körper zweyerley Kräfte, deren Richtungen mit IB und IC pa-

rallel sind, und die sich folglich auf zwey einfache, nach eben den Richtungen wirkende, Kräfte zurückführen lassen.

4) Es sey E der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller der parallelen Kräfte $\frac{\gamma^2}{2g}.ydM$, worin ihre Summe $\frac{\gamma^2}{2g}\int ydM$ nach Ee, parallel IB, angebracht, ihnen äquipollent ist; seine Entfernung IE von I = f, so erhält man:

$$\frac{\gamma^2 f}{2g}.\int ydM = \frac{\gamma^2}{2g}\int xydM, \text{ folglich } f = \frac{\int xydM}{\int ydM}.$$

5) Ferner sey F der Punkt, worin alle die parallelen Kräfte $\frac{\gamma^2}{2g}.zdM$ nach der mittlern Richtung Ff in eine Summe $\frac{\gamma^2}{2g}\int zdM$ gebracht werden können, und seine Entfernung IF von I = h, so wird gleichergestalt:

$$\frac{\gamma^2 h}{2g}\int zdM = \frac{\gamma^2}{2g}\int xzdM, \text{ mithin } h = \frac{\int xzdM}{\int zdM}.$$

6) Es wird demnach die gesammte Wirkung der Schwungkräfte auf die Axe durch die beyden Kräfte P $= \frac{\gamma^2}{2g}\int ydM$ und $Q = \frac{\gamma^2}{2g}\int zdM$, wenn man sie in E und F nach den entgegengesetzten Richtungen eE und fF anbringt, aufgehoben, und folglich die Axe durch sie verlangtermaaßen in Ruhe erhalten.

§. 277.

Man kann auch noch jede der beyden Kräfte P und Q auf zwey gegebene Punkte der Axe vertheilen, und dadurch finden, welche Gewalt die Axe in diesen beyden Punkten von den Schwungkräften des Körpers leiden muß, wenn sie daselbst gehalten, oder durch feste Ringe eingeschlossen wird. Wir wollen setzen, es seyen in I und A die Kräfte R, S, parallel mit IB, der Kraft P, und in eben den Punkten die Kräfte V, W, parallel mit IC, der Kraft Q äquipollent, so ist zuvörderst

$$P = R + S, \; Q = V + W$$

und, wenn wir IA = a, IE = f, IF = h nennen:

$$Rf = S(a - f), \; Vh = W(a - h),$$

also $Sa = (R + S) f = Pf$; $S = \frac{Pf}{a}$, $R = P\left(1 - \frac{f}{a}\right)$,

$$Wa = (V + W) h = Qh; \; W = \frac{Qh}{a}, V = Q\left(1 - \frac{h}{a}\right),$$

oder, für P, Q, f und h ihre Werthe substituirt:

$$R = \frac{\gamma^2}{2ag}(a\int ydM - \int xydM), \; S = \frac{\gamma^2}{2ag}\int xydM,$$

$$V = \frac{\gamma^2}{2ag}(a\int zdM - \int xzdM), \; W = \frac{\gamma^2}{2ag}\int xzdM.$$

§. 278.

Von diesen vier Kräften sind R und S im Punkte I, so wie V und W im Punkte A senkrecht aufeinander; sie können sich also nie gegen einander aufheben, oder, die Kräfte, die aus ihrer Zusammensetzung entspringen, können nie = o seyn, wofern nicht jede für sich genommen $= 0$ ist. Soll demnach die vereinigte Wirkung aller Schwungkräfte auf die Axe verschwinden, so muß solches auch bey den vier Kräften R, S, V, W, einzeln genommen, nothwendig der Fall seyn. Man hat also unter dieser Voraussetzung zuerst:

$$\int xydM = 0, \int xzdM = 0,$$

und weil dadurch $R = \frac{\gamma^2}{2g}\int ydM$, $V = \frac{\gamma^2}{2g}\int zdM$ wird, und diese beyden Kräfte ebenfalls verschwinden müssen, so erhält man ferner

$$\int ydM = 0, \int zdM = 0.$$

§. 279.

Man nennt eine solche Axe, die, während der Körper sich um sie dreht, von den Schwungkräften seiner Theile keine Gewalt leidet, eine **freye** Axe des Körpers. Sie ist nach vorigem §. folgenden Bedingungen unterworfen:

Fig. 27. 1. Wenn man sie zur Abscissenlinie der Ordinaten $Op = x$ annimmt, so müssen zuvörderst die Integrale $\int ydM$ und $\int zdM$ durch den ganzen Körper genommen, beyde $= 0$ seyn. Da nun für den Schwerpunkt g des Körpers die Ordinate $ef = \frac{\int ydM}{M}$, und $fg = \frac{\int zdM}{M}$ ist, so folgt: daß eine Axe des Körpers nicht frey seyn könne, wofern sie nicht durch seinen Schwerpunkt geht.

2. Außerdem wird auch noch erfordert, daß sowohl das Integral $\int xydM$, wie auch $\int xzdM = 0$ sey.

§. 280.

Ein fester Körper, der um eine freye Axe eine Umdrehung bekommt, und dabey von keiner fremden Kraft getrieben wird, setzt diese Umdrehung um sie mit der einmal erhaltenen Winkelgeschwindigkeit unverändert fort: die Axe aber bleibt unbeweglich, gleichsam wie eine feste Axe, in ihrer anfänglichen Lage, ohne daß irgend eine Kraft, sie zu halten, erfordert würde.

Da nemlich keine äußern Kräfte auf die Axe wirken, und sie, als freye Axe, auch keine Gewalt von den Schwungkräften leidet, die durch die Umdrehung des Körpers um sie hervorgebracht werden; so folgt nothwendig, daß sie in Ruhe bleiben, und der Körper fortfahren müsse, sich um sie, wie um eine feste Axe zu drehen.

Hierbey bewegt sich jedes seiner Elemente in einem auf die Axe senkrechten Kreise, und ist während dieser Bewegung keiner andern Kraft, als der Centralkraft ausgesetzt, die bloß verhindert, daß es sich nicht von seinem Mittelpunkte entferne, also in seiner Geschwindigkeit keine Aenderung bewirkt; daher denn auch der ganze Körper seine anfängliche Winkelgeschwindigkeit unverändert beybehält.

§. 281.

Fig. 35. **Aufgabe.** Die Lage einer freyen Axe IG im Körper gegen drey Linien IA, IB und IC zu bestimmen, die sich in seinem Schwerpunkte I senkrecht durchschneiden.

Aufl. 1) Eine Ebene durch IG und IC gelegt, steht auf der Ebene AIB senkrecht, und wenn also beyde in IF sich schneiden, so wird durch die Winkel AIF $= \eta$, und FIG $= \vartheta$ die Lage der Axe IG verlangtermaßen bestimmt. Es kommt also darauf an, die Werthe dieser Winkel aus Größen, die aus der Beschaffenheit des Körpers bekannt sind, herzuleiten.

2) Man ziehe mit IA, IB und IC für ein Element dM bey Z die Koordinaten IX $= x$, XY $= y$, YZ $= z$ parallel, und nehme an, daß zwischen diesen für Punkte in der Oberfläche eine Gleichung gegeben sey. Da sie aber auf die Axe IG weiter keinen Bezug haben, fälle man ZY' auf die Ebene CIF, und in derselben Y'X' auf IG senkrecht, und setze IX' $= x'$, X'Y' $= y'$, Y'Z $= z'$, so hat man als Bedingungsgleichungen der freyen Axe IG:

$$\int x'y'dM = 0, \int x'z'dM = 0.$$

Die andern beyden (§. 279. 1.) liegen schon in der Voraussetzung, daß IG und IA im Schwerpunkte I des Körpers zusammentreffe, und folglich dieser Punkt in IG hineinfalle.

3) Um die Koordinaten x', y' und z' auf die drey erstern zurückzuführen, fälle man noch in der Ebene CIF aus Y' auf IF das Perpendikel Y'W, und ziehe YW, so entsteht dadurch das Parallellogram YZY'W: denn Y'W ist auf AIB senkrecht (1), folglich mit ZY parallel, und ZY', YW sind beyde auf Y'W senkrecht; ersteres, weil es auf der Ebene CIF senkrecht ist; letzteres, weil es in der Ebene AIB liegt, worauf Y'W

senkrecht steht; also sind auch ZY′ und YW parallel. Es ist daher:

$$Y'W = ZY = z, \text{ und } YW = ZY' = z'.$$

4) Es sey nun o der Durchschnitt von XY und IF, so ist im rechtwinklichten Dreyecke IoX

$$Io = \frac{IX}{\text{Cos }\eta} = \frac{x}{\text{Cos }\eta},\ Xo = x \text{ tang } \eta,$$

und da im Dreyecke YOW der Winkel bey W ebenfalls ein rechter ist:

$$Yo = \frac{YW}{\text{Cos }\eta} = \frac{z'}{\text{Cos }\eta},\ Wo = z' \text{ tang } \eta.$$

Folglich $y = Xo + oY = x \text{ tang } \eta + \frac{z'}{\text{Cos }\eta}$, oder $z' = y \text{ Cos } \eta - x \text{ Sin } \eta$; und $IW = Io + oW = \frac{x}{\text{Cos }\eta} + z' \text{ tang } \eta = y \text{ Sin } \eta + x\left(\frac{1 - \text{Sin }\eta^2}{\text{Cos }\eta}\right) = x \text{ Cos } \eta + y \text{ Sin } \eta.$

5) Ferner sey q der Durchschnitt der Linie Y′W mit der Axe IG, so hat man im rechtw. ΔIqW

$$Iq = \frac{IW}{\text{Cos }\vartheta} = \frac{x \text{ Cos } \eta + y \text{ Sin } \eta}{\text{Cos }\vartheta},\ qW = IW$$
$$\text{tang } \vartheta = (x \text{ Cos } \eta + y \text{ Sin } \eta) \text{ tang } \vartheta$$

und in dem daranstoßenden rechtw. ΔX′qY′:

$$X'q = X'Y' \text{ tang } \vartheta = y' \text{ tang } \vartheta,\ Y'q = \frac{X'Y'}{\text{Cos }\vartheta} = \frac{y'}{\text{Cos }\vartheta},$$

mithin $z = Y'q + qW = \frac{y'}{\text{Cos }\vartheta} + (x \text{ Cos } \eta + y \text{ Sin } \eta) \text{ tang } \vartheta$, oder

$$y' = z \text{ Cos } \vartheta - (x \text{ Cos } \eta + y \text{ Sin } \eta) \text{ Sin } \vartheta$$

und endlich $x' = Iq + qX' = \frac{x \operatorname{Cos} \eta + y \operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Cos} \vartheta} +$ $y' \operatorname{tang} \vartheta = z \operatorname{Sin} \vartheta + (x \operatorname{Cos} \eta + y \operatorname{Sin} \eta) \operatorname{Cos} \vartheta.$

6) Man setze noch zur Abkürzung $x \operatorname{Cos} \eta + y \operatorname{Sin} \eta = u$, so wird $x' = z \operatorname{Sin} \vartheta + u \operatorname{Cos} \vartheta$, und $y' = z \operatorname{Cos} \vartheta - u \operatorname{Sin} \vartheta$, folglich $x'y' = (z^2 - u^2) \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \vartheta + uz \; (1 - 2 \operatorname{Sin} \vartheta^2) = \frac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\vartheta \, (z^2 - u^2) + \operatorname{Cos} 2\vartheta \,.\, uz$; daher verwandelt sich die erste Gleichung (2) in:

$$\operatorname{Cos} 2\vartheta \int uz dM - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\vartheta \int (u^2 - z^2)\, dM = 0,$$

woraus $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2\int uz dM}{\int (u^2 - z^2)\, dM}$ folgt,

und die zweyte in:

$$\operatorname{Sin} \vartheta \int zz' dM + \operatorname{Cos} \vartheta \int uz' dM = 0,$$

welche $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{-\int uz' dM}{\int zz' dM}$ giebt.

7) Hierin für u und z' (4.) ihre Werthe gesetzt, erhält man:

$$\int uz dM = \operatorname{Cos} \eta \int xz dM + \operatorname{Sin} \eta \int yz dM$$

$$\int (u^2 - z^2)\, dM = \operatorname{Cos} \eta^2 \int x^2 dM + 2 \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Sin} \eta \int xy dM + \operatorname{Sin} \eta^2 \int y^2 dM - \int z^2 dM$$

$$\int uz' dM = \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \eta \int (y^2 - x^2)\, dM + (\operatorname{Cos} \eta^2 - \operatorname{Sin} \eta^2) \int xy dM.$$

$$\int zz' dM = \operatorname{Cos} \eta \int yz dM - \operatorname{Sin} \eta \int xz dM,$$

lauter Ausdrücke, in denen der unbekannte Winkel η mit Integralgrößen verbunden ist, die sich aus der zwischen x, y und z gegebenen Gleichung leicht berechnen lassen. Unter dieser Voraussetzung nenne man:

$\int x^2 dM = A$, $\int y^2 dM = B$, $\int z^2 dM = C$,
$\int xy dM = D$, $\int xz dM = E$, $\int yz dM = F$,

so wird:

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2E \operatorname{Cos} \eta + 2F \operatorname{Sin} \eta}{A \operatorname{Cos} \eta^2 + B \operatorname{Sin} \eta^2 - C + 2D \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \eta},$$

und

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{(B - A) \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \eta + D (\operatorname{Cos} \eta^2 - \operatorname{Sin} \eta^2)}{E \operatorname{Sin} \eta - F \operatorname{Cos} \eta}.$$

8) Nach der bekannten Formel: $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2 \operatorname{tang} \vartheta}{1 - \operatorname{tang} \vartheta^2}$ könnten nun diese beyden Werthe unmittelbar mit einander verglichen werden; weil aber die Rechnung etwas mühsam ist, so setze man zuvor noch $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{m}{n}$, $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2p}{q}$; hierdurch bekommt man $p (n^2 - m^2) = mnq$, oder $pn^2 = m (mp + nq)$, und wenn man für m, n, p und q jetzt ihre Werthe substituirt:

$$mp + nq = E (B \operatorname{Sin} \eta - C \operatorname{Sin} \eta + D \operatorname{Cos} \eta) - F (A \operatorname{Cos} \eta - C \operatorname{Cos} \eta + D \operatorname{Sin} \eta),$$

also:

$$(E \operatorname{Cos} \eta + F \operatorname{Sin} \eta) (E \operatorname{Sin} \eta - F \operatorname{Cos} \eta)^2 = [(B - A) \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \eta + D (\operatorname{Cos} \eta^2 - \operatorname{Sin} \eta^2)] \times [E (B \operatorname{Sin} \eta - C \operatorname{Sin} \eta + D \operatorname{Cos} \eta) - F (A \operatorname{Cos} \eta - C \operatorname{Cos} \eta + D \operatorname{Sin} \eta)].$$

9) Beyderseits noch durch $\operatorname{Cos} \eta$ und $\operatorname{Cos} \eta^2$ dividirt, und dann $\operatorname{tang} \eta = t$ gesetzt, giebt ferner:

$$(E + Ft) (F - Et)^2 = [D + (B - A) t - Dt^2] . [DE - AF + CF + (BE - CE - DF)$$

t], oder wenn man diese Gleichung nach den Potenzen von t ordnet:

$$\begin{aligned} o = & (F^2 - D^2) E + (A - C) DF \\ & + t (F^3 - (2E^2 - D^2) F + (A - 2B + C) DE - \\ & \quad (A - B)(A - C) F) \\ & + t^2 (E^3 - (2F^2 - D^2) E + (B - 2A + C) \\ & \quad DF + (A - B)(B - C) E) \\ & + t^3 [(E^2 - D^2) F + (B - C) DE]. \end{aligned}$$

10) Hat man daraus den Werth von t, also den Winkel η, bereits gefunden, so wird dann auch (7)

$$\text{tang}\, \vartheta = \frac{\frac{1}{2}(B - A) \text{Sin}\, 2\eta + D \text{Cos}\, 2\eta}{E \text{Sin}\, \eta - F \text{Cos}\, \eta}.$$

§. 282.

Die kubische Gleichung (9) hat wenigstens eine mögliche Wurzel, und folglich der Körper zum mindesten eine freye Axe. Um zu erfahren, ob es deren noch mehrere in ihm geben müsse, nehme man die schon gefundene freye Axe jetzt zur Abscissenlinie IA der Ordinaten IX = x an; lege durch sie nach Gefallen die Ebene BIA, und suche eine Gleichung für die Oberfläche des Körpers zwischen IX = x, XY = y, YZ = z; so ist nunmehr: $\int xy dM = D = o$, $\int xz dM = E = o$.

Setzt man also für eine andere freye Axe IG, deren Lage nach jener bestimmt werden soll, wie vorhin, die Winkel AIF = η, FIG = ϑ, so wird in den beyden Gleichungen (6) gegenwärtig:

$\int uz dM = F \text{Sin}\, \eta$	$\int zz' dM = F \text{Cos}\, \eta$
$\int (u^2 - z^2) dM = A \text{Cos}\, \eta^2 + B \text{Sin}\, \eta^2 - C$	$\int uz' dM = (B - A) \text{Sin}\, \eta \text{Cos}\, \eta,$

wodurch sie folgende Gestalt bekommen:

$$(A \operatorname{Cos} \eta^2 + B \operatorname{Sin} \eta^2 - C) \operatorname{Sin} 2\vartheta - 2F \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} 2\vartheta = 0$$

$$(A - B) \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta - F \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Sin} \vartheta = 0.$$

Da letztere den Faktor $\operatorname{Cos} \eta$ hat, so folgt aus ihr $\operatorname{Cos} \eta = 0$, $\eta = 90°$. Dies für η in die erstere Gleichung substituirt, giebt: $(B - C) \operatorname{Sin} 2\vartheta - 2F \operatorname{Cos} 2\vartheta = 0$; $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2F}{B - C}$, woraus für 2ϑ, also auch für ϑ, ein doppelter Werth entspringt. Nennt man nemlich den einen Werth von $2\vartheta = \varepsilon$, so ist der andere $2\vartheta = 180° + \varepsilon$; folglich sowohl $\vartheta = \frac{1}{2}\varepsilon$, wie auch $\vartheta = 90° + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Man erhält also solchergestalt noch zwey andere freye Axen, die, wegen des rechten Winkels $\eta = AIB$, gemeinschaftlich in die Ebene BIC hineinfallen, und, weil darin ihr Abstand 90° beträgt, sowohl unter sich, als mit der erstern IA, einen rechten Winkel einschließen; woraus der merkwürdige Satz folgt: **daß es in jeden festen Körper, er sey gestaltet, wie er wolle, drey freye Axen gebe, die sich in seinem Schwerpunkte senkrecht durchschneiden.**

Anmerk. Auf diese höchst wichtige Eigenschaft an festen Körpern, die im Jahr 1755 zuerst durch Herrn von Segner entdeckt wurde, hat Euler in s. Theoria motus corp. rigid. sein ganzes System der freyen Umdrehungen fester Körper mit sehr glücklichem Erfolge gegründet, wodurch diese sonst so schwierige Lehre nunmehr zu eben der Einfachheit und Klarheit gediehen ist, die die Theorie der fortrückenden Bewegung durch den Gebrauch des Schwerpunkts längsthin schon bekommen hatte.

§. 283.

Da die drey freyen Axen des Körpers gegenseitig senkrecht auf einander stehen, so ist es unstreitig für die folgenden Untersuchungen am vortheilhaftesten, sie zu den drey Richtungslinien IA, IB und IC der Koordinaten x, y, z anzunehmen, und zwischen diesen letztern die Gleichung für die Oberfläche des Körpers zu entwickeln. Dies vorausgesetzt, hat man nun nicht allein: $\int xydM = 0$, und $\int xzdM = 0$, sondern, da die auf der Axe IB genommene Abscisse für eben den Punkt Z $= y$ ist, wird auch noch außerdem $\int yzdM = 0$; so daß also für Koordinaten des Körpers, die seinen freyen Axen parallel gezogen werden, das Produkt aus je zweyen derselben in das dazu gehörige Element der Masse, durch den ganzen Körper summirt, allemal verschwindet.

§. 284.

Fig. 6. 1. Bey allen runden Körpern, d. i. solchen, die durch Umdrehung einer ebenen Figur AMDB um ihre Axe AB entstanden sind, ist diese Linie AB selbst, eine von den freyen Axen: denn indem sich der Körper um AB dreht, ist jeder auf AB senkrechte Querschnitt eine Umdrehungsebene, worin allezeit zwey gleiche Elemente in gleichen Entfernungen von der Axe einander gegenüber liegen, deren Schwungkräfte also, weil sie gleich und entgegengesetzt sind, sich aufheben.

2. Die andern freyen Axen des runden Körpers liegen beyde in dem, durch seinen Schwerpunk gehenden,

auf AB senkrechten Querschnitte, und sind also Durchmesser desselben. Da aber alle Durchmesser dieses Querschnittes gegen den ganzen Körper völlig einerley Lage haben, so folgt, daß sie insgesammt, einer wie der andere, freye Axen desselben seyn müssen.

3. Um einzusehen, wie diese sonderbare Eigenschaft des Konoids, mit der allgemeinen Formel tang $2\vartheta = \frac{2F}{B - C}$ (§. 282.) sich vereinigen lasse, wähle man die Axe AB zur Abscissenlinie der Ordinaten x, und errichte aus dem Schwerpunkte darauf nach Gefallen eine andere Axe senkrecht, so ist diese ebenfalls eine freye Axe, mithin $\int yz\,dM = F = 0$ (§. 283.). Außerdem ist aber, wie leicht aus der Beschaffenheit des Kreises erhellet, $\int y^2 dM = \int z^2 dM$, oder $B = C$, folglich tang $2\vartheta = \frac{0}{0}$, so daß also die Formel für diesen besondern Fall den Winkel ϑ unbestimmt läßt.

4. Bey der Kugel ist jede durch ihren Schwerpunkt gehende Linie, oder jeder ihrer Durchmesser, eine freye Axe.

§. 285.

Ueberhaupt ist in jedem festen Körper, dessen centrische Linie *) gerade ist, diese Linie zugleich eine freye Axe.

*) In der engern Bedeutung hier genommen, wobey die einzelnen Querschnitte des ganzen Körpers, durch deren Schwerpunkt sie geht, zugleich senkrecht auf ihr seyn müssen.

Beweis. 1) Man nehme sie zur Abscissenlinie der Ordinaten x an, denke sich den ganzen Körper in lauter unendlich schmale, auf ihr senkrechte, Querschnitte getheilt, und ziehe in einem dieser Querschnitte die beyden andern Koordinaten y und z. Da die centrische Linie durch dessen Schwerpunkt geht, so ist für ihn, wenn wir seine Masse m nennen, $\int ydm$, so wie $\int zdm = 0$, und weil hierbey x beständig ist, auch $\int xydm = x\int ydm = 0$, und $\int xzdm = x\int zdm = 0$.

2) Es sind also von jedem einzelnen Querschnitte des Körpers die Integrale $\int xydm$ und $\int xzdm = 0$, folglich auch von allen zusammengenommen, oder nach x summirt, d. h. die vollständigen Integrale $\int xydM$ und $\int xzdM$ für den ganzen Körper, $= 0$.

3) Daß die andern beyden Integrale $\int ydM$ und $\int zdM$ ebenfalls $= 0$ seyn müssen, folgt schon daraus, weil die gedachte Linie durch die Schwerpunkte aller einzelnen Querschnitte, also auch durch ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, oder durch den Schwerpunkt des ganzen Körpers geht.

§. 286.

Solcher Körper giebt es außer den Konoiden noch eine Menge anderer, wohin z. B. die senkrechten Prismen, ganzen und abgekürzten Pyramiden gehören. Wir wollen unter diesen hier bloß das rechtwinklichte Parallelepipedum näher betrachten:

Fig. 24. Es sey I dessen Schwerpunkt; BIC ein der Grundfläche paralleler Querschnitt, IA senkrecht dar-

auf; so ist zuvörderst diese Linie eine von den drey freyen Axen. Da aber auch die andern Seitenflächen eben so gut als Grundflächen angenommen werden können, auf denen das Parallelepipedum senkrecht steht, so sind IB und IC die andern beyden freyen Axen. Eben dies zeigt uns die Formel $\tang 2\vartheta = \frac{2F}{B - C}$ auf folgende Art:

Man nenne die Masse des Parallepipedum $= M$, seine Höhe $= a$, die mit IB und IC parallelen Seiten der Grundfläche $= b$ und c, so erhält man $\int y^2 dM = B = \frac{1}{12} Mb^2$, und $\int z^2 dM = C = \frac{1}{12} Mc^2$, also $B - C = \frac{1}{12} M (b^2 - c^2)$. Ferner $\int yz dM = F = 0$, weil darin die gleichen und entgegengesetzten y und z einander aufheben; folglich $\tang 2\vartheta = 0$; $2\vartheta = 0$ und $180°$; $\vartheta = 0$ und $90°$, d. h. die andere freye Axe fällt in IB, und die dritte in IC.

Ist aber $b = c$, so wird $\tang 2\vartheta = \frac{0}{0}$, also bleibt dann der Winkel ϑ unbestimmt, oder kann genommen werden, wie man will; daher sind in einem Parallelepipedum, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, alle mit der Grundfläche durch den Schwerpunkt parallel gezogene Linien, freye Axen desselben.

§. 287.

Fig. 35. **Aufgabe.** Die Momente der Trägheit eines Körpers Ma^2, Mb^2, Mc^2 in Bezug auf seine drey freyen Axen IA, IB, IC sind gegeben; man sucht sein Moment der Trägheit für irgend eine andere durch sei-

nen Schwerpunkt gezogene Axe IG, die mit jenen die Winkel AIG $= \alpha$, BIG $= \beta$, und CIG $= \gamma$ macht.

Aufl. 1) Man fälle aus dem Orte Z des Elementes dM auf die Axe IG das Perpendikel ZX', und setze dies $= r$, so ist das gesuchte Moment der Trägheit, das wir Mh^2 nennen wollen, $= \int r^2 dM$.

2) Nun giebt zuvörderst die bloße Betrachtung der Figur:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ZI^2 = IX'^2 + X'Z^2 = x'^2 + r^2$$

$$\text{also: } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x'^2,$$

Ferner hat man aus §. 281. N. 5.

$$x' = x \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + y \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + z \operatorname{Sin} \vartheta,$$

oder, da in den beyden an IF rechtwinklichten Ecken IFGA, und IFGB, $\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, $\operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, und außerdem $\operatorname{Sin} \vartheta = \operatorname{Cos} \gamma$ ist:

$$x' = x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma,$$

folglich wird:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x^2 + y^2 + z^2) - (x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma)^2 \\ &= x^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + y^2 \operatorname{Sin} \beta^2 + z^2 \operatorname{Sin} \gamma^2 - 2xy \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta \\ &\quad - 2xz \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma - 2yz \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma \end{aligned}$$

und, wenn man sich der im §. 281. N. 7. gebrauchten Bezeichnungen bedient:

$$\int r^2 dM = A \operatorname{Sin} \alpha^2 + B \operatorname{Sin} \beta^2 + C \operatorname{Sin} \gamma^2 - 2 D \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta - 2 E \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma - 2 F \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma.$$

3) Da aber die Axen, worauf sich x, y und z beziehen, freye Axen sind, so ist hier D, E und F $= 0$; es bleibt also noch übrig:

$$\int r^2 dM = A \operatorname{Sin} \alpha^2 + B \operatorname{Sin} \beta^2 + C \operatorname{Sin} \gamma^2$$

4) Nun

4) Nun ist $Ma^2 = \int (y^2 + z^2)\, dM = B + C$

$$Mb^2 = \int (x^2 + z^2)\, dM = A + C$$

$$Mc^2 = \int (x^2 + y^2)\, dM = A + B$$

$$\tfrac{1}{2} M (a^2 + b^2 + c^2) = A + B + C$$

mithin $A = \frac{1}{2} M (b^2 + c^2 - a^2)$, $B = \frac{1}{2} M (a^2 + c^2 - b^2)$, $C = \frac{1}{2} M (a^2 + b^2 - c^2$.

Diese Werthe für A, B und C in 3 substituirt, geben:

$$Mh^2 = \tfrac{1}{2} M \sin\alpha^2 (b^2 + c^2 - a^2) + \tfrac{1}{2} M \sin\beta^2 (a^2 + c^2 - b^2) + \tfrac{1}{2} M \sin\gamma^2 (a^2 + b^2 - c^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} M [a^2 (\sin\beta^2 + \sin\gamma^2 - \sin\alpha^2) + b^2 (\sin\alpha^2 + \sin\gamma^2 - \sin\beta^2) + c^2 (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2].$$

5) Hierin wird noch, weil $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ist,

$$\sin\beta^2 + \sin\gamma^2 = 1 + \cos\alpha^2 - (\cos\beta^2 + \cos\gamma^2) = 2 \cos\alpha^2,$$

und auf gleiche Weise:

$$\sin\alpha^2 + \sin\gamma^2 - \sin\beta^2 = 2 \cos\beta^2,\ \sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2 = 2 \cos\gamma^2;$$

daher bekommt man endlich:

$$Mh^2 = Ma^2 \cos\alpha^2 + Mb^2 \cos\beta^2 + Mc^2 \cos\gamma^2.$$

§. 288.

1. Will man aus der gefundenen Formel den dritten Winkel γ, der offenbar von den andern beyden α und β abhängig ist, herausschaffen, so darf man nur für $\cos\gamma^2$ seinen Werth $1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2$ setzen. Hierdurch erhält man:

$$Mh^2 = Mc^2 + M(a^2 - c^2) \operatorname{Cos} \alpha^2 + M (b^2 - c^2) \operatorname{Cos} \beta^2.$$

2. Man kann auch zur Bestimmung der Lage der Axe IG die beyden Winkel AIF $= \eta$ und FIG $= \vartheta$ nehmen, und diese statt der Winkel α, β und γ in die Formel einführen. Zu dem Ende wird (§. 287. 2.) $\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, $\operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, $\operatorname{Cos} \gamma = \operatorname{Sin} \vartheta$, mithin:

$$Mh^2 = Ma^2 \operatorname{Cos} \eta^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 + Mb^2 \operatorname{Sin} \eta^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 + Mc^2 \operatorname{Sin} \vartheta^2.$$

3. Läßt man bey runden Körpern Mc^2 das Moment der Trägheit für die Polaraxe bedeuten, so beziehen sich Ma^2 und Mb^2 auf die Durchmesser des durch den Schwerpunkt gehenden Querschnittes, und sind folglich einander gleich. Man bekommt also für solche Körper

$$Mh^2 = Ma^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 + Mc^2 \operatorname{Sin} \vartheta^2,$$

wo ϑ das Komplement des Winkels ist, den die schiefe Axe IG mit der Polaraxe IC am Schwerpunkte einschließt.

Exempel. Es sey von einem Sphäroid die halbe Polaraxe $= e$, der Halbmesser des Aequators $= f$; man sucht sein Moment der Trägheit gegen eine Axe, die durch seinen Mittelpunkt geht, und gegen den Aequator unter dem Winkel ϑ geneigt ist. Hier ist $c^2 = \frac{2}{5} f^2$ (§. 212. 3.) und $a^2 = \frac{1}{5}(e^2 + f^2)$ (§. 214. 4. , folglich

$$Mh^2 = \tfrac{1}{5} M [(e^2 + f^2) \operatorname{Cos} \vartheta^2 + 2f^2 \operatorname{Sin} \vartheta^2] = \tfrac{1}{5} M [e^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 + f^2 (1 + \operatorname{Sin} \vartheta^2)].$$

§. 289.

Aufgabe. Die Lage derjenigen Axe im Körper zu bestimmen, wofür sein Moment der Trägheit am kleinsten ist.

Aufl. 1) Eine Axe, die diese Eigenschaft haben soll, muß nothwendig durch den Schwerpunkt des Körpers gehen: denn für jede andere Axe ist (§. 208. 2.) das Moment der Trägheit größer, als für die durch den Schwerpunkt ihr parallel gezogene; daher man nur für Axen letzterer Art die Untersuchung anzustellen braucht.

2) Diesem zufolge differenziire man die vorhin erhaltene Gleichung

$$h^2 = c^2 + (a^2 - c^2) \operatorname{Cos} \alpha^2 + (b^2 - c^2) \operatorname{Cos} \beta^2$$

sowohl nach α als nach β, und setze beyde Differenziale $= 0$. Man bekommt solchergestalt:

$$0 = (a^2 - c^2) \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \alpha, \text{ und}$$

$$0 = (b^2 - c^2) \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} \beta.$$

4) Hieraus entspringen folgende Werthe für α und β

$$\operatorname{Sin} \alpha = 0, \ \operatorname{Cos} \alpha = 0; \ \operatorname{Sin} \beta = 0, \ \operatorname{Cos} \beta = 0$$

$$\alpha = 0, \ 90^\circ \quad ; \quad \beta = 0, \ 90^\circ,$$

die sich auf vierfache Art mit einander verbinden lassen:

4) Die erste Kombination $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ist unmöglich, weil die Axe nicht zugleich in IA und IB hineinfallen kann.

Vermöge der zweyten $\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$, kommt die gesuchte Axe in IA zu liegen;

vermöge der dritten $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$, in IB, und

nach der vierten $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, steht sie auf beyden senkrecht, und fällt daher mit der dritten freyen Axe IC zusammen.

5) Hier zeigt sich uns also eine neue merkwürdige Eigenschaft der freyen Axen, die darin besteht, daß das Moment der Trägheit des Körpers in Ansehung ihrer ein Minimum ist. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, pflegt man sie auch wohl mit Euler noch besonders die drey **Hauptaxen** des Körpers zu nennen.

Zehntes Kapitel.

Von der gemischten Bewegung fester Körper.

---

§. 290.

Fig. 34. **Lehrsatz.** Wenn ein fester Körper um drey Axen IA, IB, IC, die sich in einem seiner Punkte I senkrecht durchschneiden, zu gleicher Zeit drey Winkelgeschwindigkeiten ϑ, ω, π bekommt, so dreht er sich mit der einfachen Winkelgeschwindigkeit $\sigma = \sqrt{(\vartheta^2 + \omega^2 + \pi^2)}$ um eine mittlere Axe IG, deren Lage vermittelst der drey Winkel AIG $= \alpha$, BIG $= \beta$, und CIG $= \gamma$ durch folgende Proportion bestimmt wird.

$$\text{Cos}\,\alpha : \text{Cos}\,\beta : \text{Cos}\,\gamma = \vartheta : \omega : \pi$$

Beweis. 1) Es sey aus einem beliebigen Punkte Z des Körpers ZY auf die Ebene AIB, und in derselben YX auf IA senkrecht, wodurch man also für diesen Punkt die drey rechtwinklichten Koordinaten IX = x, XY = y und YZ = z erhält, die mit IA, IB und IC parallel laufen. Außerdem sey noch ZX = r; so bewegt sich der Punkt Z, vermöge der Umdrehung des Körpers um IA nach Zz, senkrecht auf ZX, mit einer Geschwindigkeit = γr.

2) Man zerlege diese in eine nach YZ, parallel mit IC, und in eine darauf senkrechte, parallel mit IB. Erstere wird, weil sie nach ZY gerichtet ist, folglich diese Ordinate vermindert, $= - \gamma r \operatorname{Cos} ZXY = - \gamma y$; letztere $= \gamma r \operatorname{Sin} ZXY = \gamma z$.

3) Auf gleiche Weise entspringen aus der Umdrehung des Körpers um IB für den Punkt Z nach den beyden mit IC und IA parallelen Richtungen die Geschwindigkeiten πy und $- \pi x$, wovon man sich durch eine ähnliche Zeichnung, wie für die Axe IA hier entworfen ist, sehr leicht überzeugen kann.

4) Diese einzelnen Geschwindigkeiten nach jeder der drey Richtungen IA, IB, IC besonders addirt, geben für den Punkt Z:

nach IA die Geschwindigkeit $\dfrac{dx}{dt} = \omega z - \pi y$,

nach IB . . . $\dfrac{dy}{dt} = \gamma z - \pi x$,

nach IC . . . $\dfrac{dz}{dt} = \omega x - \gamma y$.

5) Hieraus lassen sich nun zunächst die Punkte im Körper bestimmen, die bey seiner dreyfachen Umdre-

hung in Ruhe bleiben. Man hat nemlich für diese $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$, folglich:

$$\omega z = \pi y,\ \gamma z = \pi x,\ \omega x = \gamma y$$

$$\text{oder } x : y : z = \gamma : \omega : \pi,$$

Fig. 35. wodurch eine gerade Linie IG angedeutet wird, die mit den drey senkrechten Axen in dem gemeinschaftlichen Punkte I zusammenläuft.

6) Diese Linie bleibt also bey der Bewegung des Körpers unverändert in ihrer Lage, und ist daher die Axe, um welche sich der Körper dreht. Man fälle noch auf sie aus Z das Perpendikel ZX', und nenne die Koordinaten des Punktes X', parallel mit IA, IB und IC, $=$ X, Y und Z; so wird $X : Y : Z = \gamma : \omega : \pi$. Ferner, wenn man die beyden Winkel AIF und FIG $=$ η und ϑ setzt,

$$IX' \sin\vartheta = Z,\ IX' \cos\vartheta \sin\eta = Y, \text{ und } IX' \cos\vartheta \cos\eta = X, \text{ oder}$$

$$X : Y : Z = \cos\eta \cos\vartheta : \sin\eta \cos\vartheta : \sin\vartheta = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma \ (\S.\ 287.\ 2.)$$

mithin $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \gamma : \omega : \pi$.

7) Man erhält daraus $\gamma^2 \cos\beta = \omega^2 \cos\alpha^2$, und $\gamma^2 \cos\gamma = \pi^2 \cos\alpha^2$, also $(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2) \cos\alpha^2 = \gamma^2 (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) = \gamma^2$; folglich

$$\cos\alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}},\ \cos\beta = \frac{\omega}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}},$$

$$\text{und } \cos\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}}.$$

8) Es sey endlich die Winkelgeschwindigkeit des

Körpers um die Axe $IG = \sigma$; die Entfernung $ZX' = w$; so ist σw die Geschwindigkeit des Punktes Z in seiner Bahn, und deshalb:

$$\sigma^2 \cdot w^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

Ferner $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 z^2 - 2\omega\pi yz + \pi^2 y^2$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \gamma^2 z^2 - 2\gamma\pi xz + \pi^2 x^2,$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \omega^2 x^2 - 2\gamma\omega xy + \gamma^2 y^2$$

folglich $\sigma^2 w^2 = (\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\gamma x + \omega y + \pi z)^2$;

oder $\dfrac{\sigma^2 w^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2} = x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{(\gamma x + \omega y + \pi z)^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2}$;

9) Und aus (§. 287. 2.)

$w^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Cos}\beta + z \operatorname{Cos}\gamma)^2$; wovon letzteres Glied, wenn man darin für Cos α, Cos β und Cos γ ihre Werthe substituirt, sich in $\dfrac{(\gamma x + \omega y + \pi z)^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2}$ verwandelt.

Diese Gleichung mit der vorhergehenden verglichen, giebt demnach: $\dfrac{\sigma^2 w^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2} = w^2$, also $\sigma = \sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}$.

§. 291.

Hieraus folgt gegenseitig, daß man jede einfache Umdrehung eines festen Körpers als zusammengesetzt betrachten, und solchergestalt in drey andere um drey willkührliche Axen, die sich in einem ihrer Punkte senkrecht durchschneiden, zerlegen könne. Es sey nemlich IG die gegebene Umdrehungsaxe, und σ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um dieselbe; ferner seyen α, β und γ die Winkel, die sie mit den drey senkrechten Axen IA, IB, IC einschließt, und $\eth$, ω, π die Winkelgeschwindigkeiten, worin die erstere σ um diese drey Axen zerfällt, so hat man (7)

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\eth}{\sigma},\ \text{Cos}\,\beta = \frac{\omega}{\sigma},\ \text{Cos}\,\gamma = \frac{\pi}{\sigma},\ \text{mithin}$$

$$\eth = \sigma\,\text{Cos}\,\alpha,\ \omega = \sigma\,\text{Cos}\,\beta,\ \pi = \sigma\,\text{Cos}\,\gamma;$$

wobey dann nur noch aus den Umständen beurtheilt werden muß, nach welchen Seiten diese einzelnen Umdrehungen geschehen. Dreht sich z. B. der Körper um die Axe IG nach B zu, so geschieht begreiflich die Umdrehung um IA nach der Seite CB, die um IB nach AC, und die um IC nach AB.

§. 292.

Liegen die beyden Axen IA und IB mit der gegebenen Umdrehungsaxe des Körpers IF in einer Ebene, so ist $\gamma = 90°$, also $\text{Cos}\,\gamma = 0$, mithin auch die Winkelgeschwindigkeit um die dritte Axe IC $= 0$; daher entstehen in diesem Falle bloß zwey Umdrehungen um die ersteren beyden Axen IA und IB, und zwar wird, wenn man den Winkel FIA $= \eta$ nennt, $\eth = \sigma\,\text{Cos}\,\eta$, und $\omega = \sigma\,\text{Cos}\,(90° - \eta) = \sigma\,\text{Sin}\,\eta$.

§. 293.

Lehrsatz. Jede augenblickliche Bewegung eines festen Körpers, sie mag geschehen, auf welche Art man will, ist eine einfache Umdrehung um irgend eine, entweder im Körper selbst, oder außerhalb demselben liegende, unbewegliche Axe.

Fig. 36. **Beweis.** 1) Es sey BAO die anfängliche Lage irgend einer nach Gefallen im Körper angenommenen Ebene; baO ihre jetzige, worin sie durch die Bewegung des Körpers verschoben worden ist; $d\phi$ der Neigungswinkel, AO der Durchschnitt beyder. Ferner sey aO die vorige Lage dieser Durchschnittslinie in derselben, und der Winkel $AOa = d\psi$; so hat sich der Körper auf zwiefache Art gedreht: einmal nemlich um die Axe AO um den Winkel $d\phi$, und dann um eine auf AOa in O senkrechte Axe Oc um den Winkel $d\psi$.

2) Da nun diese Axen im Punkte O zusammen treffen, folglich in einer Ebene AOc liegen, so vereinigen sich beyde Umdrehungen des Körpers zu einer dritten um eine mittlere Axe Of, die gleichfalls in dieser Ebene liegt; und wegen des rechten Winkels AOc hat man:

$$\operatorname{Cos} AOf = \frac{d\phi}{\sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2)}}, \text{ oder } \operatorname{tang} AOf = \frac{d\psi}{d\phi}.$$

3) Die ganze Bewegung des Körpers besteht demnach in einer einfachen Umdrehung desselben um die Axe Of, wobey er den Winkel $\sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2)}$ um sie beschrieben hat.

§. 294.

Fallen die beyden Ebenen baO und BAO in einander, so kann man darin die Linie AO nach Willkühr annehmen. Alsdann fällt die Umdrehungsaxe des Körpers, weil $d\varphi = o$ ist, in Oc hinein, und der Winkel, den er um sie zurückgelegt hat, ist $= d\psi$.

Sind hingegen die gedachten Ebenen einander parallel, so kann man sich vorstellen, ihr Durchschnitt liege unendlich weit vom Körper entfernt, folglich auch seine Umdrehungsaxe. Daher läßt sich das Fortrücken eines Körpers als eine Umdrehung desselben betrachten, die um eine unendlich weit von ihm entlegene Axe geschieht.

§. 295.

Fig. 37. **Lehrsatz.** Wenn ein fester Körper um die Axe IA den Winkel $d\varphi$ beschreibt, und zugleich nach einer auf sie senkrechten Richtung IC um ds fortrückt, so hat er sich während der Zeit um eben den Winkel, und nach eben der Seite zu, um eine unbewegliche Axe OF gedreht, die mit IA in einer auf IC senkrechten Ebene BIA parallel läuft, und darin um $IO = \frac{ds}{d\varphi}$ von ihr entfernt liegt.

Beweis 1) Man fälle aus einem Punkte Z des Körpers auf die Ebene BIA das Perpendikel ZY, und aus Y auf IA noch ein zweytes YX, und setze $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, $XZ = r$, so ist $r d\varphi$ der Raum Zz, den dieser Punkt vermöge der Umdrehung des Körpers um IA zurücklegt.

2) Er zerfällt nach XY und YZ in die Räume $zd\varphi$ und $-yd\varphi$ (§. 290. 2.), mit welchem letztern sich noch der Raum ds verbindet, um den der Punkt Z nach YZ, parallel IC, zu gleicher Zeit fortrückt, so daß überhaupt: $dx = o$, $dy = zd\varphi$, und $dz = -yd\varphi + ds$ wird.

3) Für solche Punkte nun, die während der Bewegung des Körpers in Ruhe bleiben, hat man $dx = o$, $dy = o$, $dz = o$, also

$$z = o, \; y = \frac{ds}{d\varphi};$$

woraus erhellet, daß diese Punkte in einer geraden Linie OF liegen, die in die Ebene BIA hineinfällt, und darin von IA um die Weite $\frac{ds}{d\varphi}$ absteht.

4) Man setze den Winkel, den der Körper um die Axe OF beschreibt, $= d\psi$, und die senkrechte Entfernung ZX′ des Punktes Z von ihr $= u$, so bekommt man:

$$u^2 d\psi^2 = dy^2 + dz^2 = z^2 d\varphi^2 + (yd\varphi - ds)^2$$
$$= d\varphi^2 \left[z^2 + \left(y - \frac{ds}{d\varphi}\right)^2\right]$$

Ferner $u^2 = YZ^2 + YX'^2 = z^2 + \left(y - \frac{ds}{d\varphi}\right)^2$; folglich:

$$d\psi^2 = d\varphi^2, \; d\psi = d\varphi.$$

5) Weil endlich der Raum, den der Punkt Z vermöge dieser Umdrehung nach YZ durchläuft, ebenfalls negativ ist, wofern $y > \frac{ds}{d\varphi}$ ist, oder Y auf einerley

Seite von IA und OF fällt, so folgt, daß die Umdrehung des Körpers um letztere Axe nach eben der Seite zu geschehe, als um erstere.

§. 296.

Man kann daher auch umgekehrt jedes augenblickliche Drehen des festen Körpers um die ruhende Axe OF als eine Zusammensetzung aus einer andern Umdrehung um eine mit OF parallel gezogne Axe IA, und einem Fortrücken nach der auf die Ebene OIA senkrechten Richtung IC ansehen, und sie in diese beyden einzelnen Bewegungen zerlegen. Es sey nemlich die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Axe OF $= \gamma$, die Entfernung dieser Axe von der angenommenen IA $= 1$, die gesuchte Geschwindigkeit des daraus entspringenden Fortrückens $= v$, so hat man:

$$1 = \frac{ds}{d\varphi},\ \gamma = \frac{d\varphi}{dt};\ \text{mithin wird}\ v = \frac{ds}{dt} = \gamma 1,$$

und die Winkelgeschwindigkeit um IA ebenfalls $= \gamma$ (§. 295. 4.).

Da man nun die letztere Axe IA auch durch den Schwerpunkt I ziehen kann, so folgt: daß jede Umdrehung eines Körpers, die um eine ruhende Axe geschieht, folglich auch überhaupt jede augenblickliche Bewegung desselben (§. 293.) in ein Drehen um die durch den Schwerpunkt ihr parallel laufende Axe, und in ein Fortrücken nach der auf die Ebene beyder Axen senkrechten Richtung, sich zerlegen lasse.

§. 297.

So ist z. B. das Fortrollen eines Cylinders auf ebenen Boden eine stete Umdrehung desselben um die gerade Linie, worin er jedesmal den Boden berührt. Nennt man also seine Winkelgeschwindigkeit um diese Axe $= \gamma$, die Entfernung seines Schwerpunkts von Fig. 38. ihr, oder seinen Halbmesser $CO = f$, so entspringt daraus eine fortrückende Geschwindigkeit $= \gamma f$, und eine Winkelgeschwindigkeit um die durch den Schwerpunkt gehende Axe, die ebenfalls $= \gamma$ ist.

Daher besteht die wälzende Bewegung des Cylinders theils aus einer Umdrehung um seine geometrische Axe, und theils aus einem Fortrücken, das, senkrecht auf jene Axe, dem Boden parallel geschieht; und wenn man das Drehen nach dem Bogen mißt, den ein Punkt im Umfange beschreibt, so sind beyder Geschwindigkeiten einander gleich.

§. 298.

Fig. 39. **Aufgabe.** Ein fester Körper, dessen Masse $= M$ ist, soll um eine Axe OD, die mit der freyen Axe IA parallel läuft, die Winkelgeschwindigkeit $d\gamma$ bekommen; man sucht die dazu erforderliche Kraft V, und die Richtung, nach der sie auf den Körper wirken muß.

Aufl. 1) Man errichte aus dem Schwerpunkte I des Körpers zwey andere Linien IB und IC sowohl unter sich, als auf IA senkrecht, und ziehe diesen für ein Element des Körpers dM bey Z die Koordinaten $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ parallel. Ferner lege man durch OD eine Ebene, parallel mit BIA, verlängere ZY bis sie dieselbe in y schneidet, ziehe aus y auf OD das Perpendikel yx, und setze $xy = y'$, $yZ = z'$, $xZ = r'$.

2) Dann sey auch noch Xr auf xy senkrecht, oder mit Zy parallel; so sind xr und Xr die Entfernungen der Axe OD von den beyden Ebenen CIA, BIA, und wenn diese a uud b genannt werden, $y' = a + y$, $z' = b + z$. Außerdem ist $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ die Entfernung zwischen OD und IA, die wir l nennen wollen.

3) Dies vorausgesetzt, weiß man nun schon aus §. 199., daß der Körper verlangtermaßen um die Axe OD gedreht würde, wenn man auf jedes seiner Elemente, wie dM, eine Kraft $= \frac{r'dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, senkrecht auf xZ, wirken ließe. Daher sind alle diese Kräfte in Verbindung der gesuchten Kraft V äquipollent, und müssen folglich, nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihr das Gleichgewicht halten.

4) Könnte man also sie zusammen auf einen Punkt des Körpers vereinigen, ohne dadurch ihr Gleichgewicht mit V aufzuheben, so gäbe dies eine Kraft, die der Kraft V gleich und entgegengesetzt seyn müßte, und folglich sowohl ihre Größe als Richtung bestimmte. Man gelangt dazu auf folgende Art:

5) Die Kraft $\frac{r'dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ zerfällt (§. 290. 2.) nach der Richtung ZY in eine $dp = \frac{y'dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt} =$

$\frac{(a+y)\,dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und nach der darauf senkrechten, oder mit XY parallelen Richtung in eine $dq = \frac{z'dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{(b+z)\,dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$; und ein Gleiches geschieht mit allen den übrigen Umdrehungskräften, die wir uns auf die einzelnen Punkte des ganzen Körpers angebracht denken.

6) Den parallelen Kräften dp ist aber in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte die eine Kraft $p = \frac{d\gamma}{2gdt}\int(a+y)\,dM = \frac{aM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ (§. 279.) äquipollent und die Koordinaten dieses Punktes, der in die Ebene BIA fällt, sind: längs $IA = \frac{\int xdp}{p}$, und senkrecht darauf, oder parallel IB, $= \frac{\int ydp}{p}$.

7) Hierin für p und dp ihre Werthe substituirt, giebt $\frac{\int xdp}{p} = \frac{\int(ax+xy)\,dM}{aM} = \frac{\int xdM}{M} + \frac{\int xydM}{aM} = 0$ (ebendas.); also fällt der Punkt irgendwo in E in die Linie IB, und es ist $IE = \frac{\int ydp}{p} = \frac{\int(ay+y^2)\,dM}{aM} = \frac{\int y^2dM}{aM}$.

8) Auf gleiche Weise vereinigen sich alle die parallelen Kräfte dq zu ihrer Summe $q = \frac{d\gamma}{2gdt}\int(b+z)\,dM$

$= \frac{bM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ in einen Punkt F der Linie IC, dessen Entfernung IF von $I = \frac{\int z^2 dM}{bM}$ ist.

9) Verlängert man nun in der Ebene BIC die Richtungen Ee und Ff der beyden Kräfte p und q bis zu ihrem Durchschnittspunkte G, und verlegt sie gemeinschaftlich auf diesen Punkt, so entspringt aus ihnen nach einer mittlern Richtung Gg die Kraft $\sqrt{(p^2+q^2)}$ $= \frac{Md\gamma}{2gdt}\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{Mld\gamma}{2gdt}$; der also die gesuchte Kraft V gleich ist.

10) In Ansehung ihrer Richtung gG folgt zunächst, daß dieselbe in BIC, d. h. in eine Ebene falle, die die freye Axe IA im Schwerpunkte I senkrecht schneidet; und was ihre Lage in dieser Ebene betrift, so hat man tang $eGg = \frac{q}{p} = \frac{b}{a} =$ tang Xxr. Zieht man daher auf Xx das Perpendikel $X\varrho$, so ist $eGg = rX\varrho$, folglich Gg mit $X\varrho$ parallel; woraus also ferner erhellet, daß die Richtung der Kraft V auf der Ebene IOD, die durch die beyden Axen IA und OD geht, senkrecht sey.

11) Um endlich ihren Abstand vom Schwerpunkte I zu bestimmen, welcher $= f$ seyn mag, darf man nur in Erwägung ziehen, daß das Moment der Kraft V gegen die Axe IA, den Momenten der beyden Kräfte p und q gleich seyn muß. Diesem zu Folge wird

$$Vf = p \cdot IE + q \cdot IF \frac{d\gamma}{2gdt}\int(y^2+z^2)\,dM,$$

oder,

oder, wenn man das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die freye Axe IA $= Mh^2$ setzt:

$$Vf = \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}.$$

§. 299.

Wenn daher auf den ruhenden Körper eine gegebene Kraft V wirkt, die gegen seine freye Axe IA das Moment Vf hat, und deren Richtung in die Ebene der andern beyden freyen Axen fällt, so bekommt er dadurch zu gleicher Zeit eine Winkelgeschwindigkeit $d\gamma = \frac{2gVfdt}{Mh^2}$ um die Axe IA, und eine fortrückende Geschwindigkeit $l d\gamma = \frac{2gVdt}{M}$ nach derselben Richtung, die die Kraft hat (§. 295.).

Es ist demnach in Ansehung der fortrückenden Bewegung des Körpers ganz einerley, ob die Richtung der Kraft in der gedachten Ebene durch seinen Schwerpunkt geht, oder nicht; sie bewirkt aber im letztern Falle außerdem noch eine Umdrehung desselben um seine freye Axe, die sich eben so verhält, als wenn diese Axe befestigt wäre.

§. 300.

Fig. 40. **Aufgabe.** Auf einen Körper, der Anfangs in Ruhe ist, wirkt in jedem Augenblicke eine Kraft V, deren Richtung in die Ebene BIC der beyden freyen Axen IB und IC fällt; man sucht die Bewegung desselben.

Aufl. 1) Aus vorigem §. ist klar, daß der Körper durch die fortgesetzte Wirkung dieser Kraft keine andere Umdrehung, als um die dritte seiner freyen Axen IA erhalten könne, und sein Schwerpunkt, der Anfangs in der Ebene BIC lag, auch während seines Fortrückens beständig darin bleiben müsse. Es sey demnach M sein Ort in dieser Ebene nach Verlauf einer gegebenen Zeit t; aus ihm sey MP auf IB senkrecht gezogen, und IP $= x$, PM $= y$. Außerdem sey die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Axe IA in eben dem Augenblicke $= \gamma$.

2) Weil IA eine freye Axe ist, so würde der Körper vermöge seiner Trägheit im nächsten Zeittheile dt fortfahren, sich mit dieser einmal erhaltenen Winkelgeschwindigkeit um dieselbe, wie um eine feste Axe, zu drehen (§. 280.). Allein die Kraft V ertheilt ihm um eben die Axe, wenn wir ihr Moment gegen sie $= Vf$ setzen, noch ferner die Winkelgeschwindigkeit $\frac{2gVfdt}{Mh^2}$; also ist dies der augenblickliche Zuwachs, den er zu voriger bekommt, und folglich $d\gamma = \frac{2gVdt}{Mh^2}$; woraus man

$$\gamma = \frac{2g}{Mh^2} \int Vfdt \text{ erhält.}$$

3) Was die fortgehende Bewegung des Körpers betrift, so wird solche durch die Kraft V eben so geändert, als wenn statt ihrer eine gleich große Kraft nach paralleler Richtung auf den Schwerpunkt desselben

wirkte. Nennt man daher den Winkel, den ihre Richtung mit der Axe IB einschließt, $= \phi$, so zerfällt sie nach Mo und om, parallel IB und IC, in die beyden den Kräfte V Cos ϕ und V Sin ϕ, und man hat also (§. 59. 4.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gV \operatorname{Cos} \phi}{M}, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gV \operatorname{Sin} \phi}{M}.$$

§. 301.

Wir wollen setzen, der Körper werde außerdem noch von zwey andern Kräften P und Q getrieben, deren Richtungen, parallel mit IB und IC, durch seinen Schwerpunkt gehen, so haben diese offenbar auf seine Umdrehung keinen Einfluß, weil ihre Momente gegen die Axe IA = o sind. Es bleibt daher, wie vorhin, $\frac{d\aleph}{dt} = \frac{2gVf}{Mh^2}$, und wenn wir zugleich annehmen, daß der Körper schon Anfangs eine Winkelgeschwindigkeit γ um diese nach eben der Seite zu gehabt habe, wohin die Kraft V ihn zu drehen strebt, so wird

$$\aleph = \gamma + \frac{2g}{Mh^2} \int Vfdt.$$

In Ansehung der fortrückenden Bewegung erhält man aber nunmehr:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{M} (P + V \operatorname{Cos} \phi); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M} (Q + V \operatorname{Sin} \phi).$$

§. 302.

Fig. 41. **Aufgabe.** Um eine cylindrische Rolle tvr ist ein Faden gewickelt, und dessen eines Ende irgendwo

in C festgeheftet. Man läßt die Rolle an diesem Faden aus der Ruhe herabsinken; es fragt sich, zu welcher Tiefe sie binnen einer gegebenen Zeit t gelangt seyn wird.

Aufl. 1) Es wirken auf sie in jedem Augenblicke zwey Kräfte: nemlich ihr Gewicht $= M$, wodurch sie nach vertikaler Richtung ov herabwärts getrieben, und der abgewickelte Theil Ct des Fadens nach eben der Richtung straff gezogen wird; und die Spannung des Fadens $= T$, deren Richtung in der Ebene tvr der beyden freyen Axen der Rolle tr und ov liegt, und die also eine Umdrehung derselben um ihre dritte, auf tvr senkrechte, freye Axe hervorbringt.

2) Es sey nun der Halbmesser der Rolle $to = f$, die Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes o nach Verlauf der Zeit $t = v$, ihre Winkelgeschwindigkeit für eben die Zeit $= \gamma$; so ist das Moment der Spannung gegen die erwähnte Axe $= Tf$, und das Moment der Trägheit der Rolle in Bezug auf dieselbe Axe $= \frac{1}{2}Mf^2$, folglich:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gTf}{\frac{1}{2}Mf^2} = \frac{2gT}{Mf}.$$

3) Und weil die Kraft der Spannung zu gleicher Zeit eben die Verzögerung in dem Herabsinken der Rolle bewirkt, als wenn ihre Richtung durch den Schwerpunkt derselben ginge; so ist ferner:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g(M-T)}{M} = 2g - \frac{2gT}{M}.$$

4) Begreiflich geschieht die Abwickelung des Fa-

dens von der Rolle dadurch, daß die Rolle sich fortdauernd um den Unterstützungspunkt t dreht, wo der Faden ihren Umfang verläßt. Daher ist ihre Bewegung wälzend (§. 297.), und folglich:

$$\gamma = \frac{v}{f}, \text{ oder } \frac{f d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

5) Man bekommt also $\frac{f d\gamma}{dt} = \frac{4gT}{M} = 2g - \frac{2gT}{M}$, woraus $T = \frac{1}{3}M$ folgt. Dieser Werth für T in (3) gesetzt, giebt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}g, \; v = \frac{4}{3}gt, \; \gamma = \frac{4gt}{3f}.$$

6) Und wenn man den Raum, durch den die Rolle in der Zeit t herabgesunken ist, $= x$ nennt, erhält man $dx = \frac{4}{3}gtdt$, folglich $x = \frac{2}{3}gt^2$.

7) Ihr Schwerpunkt wird also mit gleichförmiger Beschleunigung herabgetrieben; nur langsamer als beym ungehinderten Fallen. Es verhält sich nemlich für einerley Zeit der Raum, den er zurückgelegt hat, zum freyen Fallraume, wie 2 : 3.

§. 303.

Man setze die Länge des ganzen Fadens $= a$, so ist für den Zeitpunkt, wo er sich völlig abgewickelt hat, $a = \frac{2}{3}gt^2$, mithin $t = \sqrt{\frac{3a}{2g}}$, $v = \sqrt{\frac{8}{3}ag}$, und $\gamma = 2\sqrt{\frac{2ag}{3f^2}}$.

Bevor die Rolle auf die andere Seite des Fadens gelangt, nimmt die Beschleunigung ihrer Umdrehung so lange ab, bis to und Ct in eine gerade Linie zu liegen kommen, wo sie dann gänzlich verschwindet. Darauf wird die Umdrehung vom Faden eben so verzögert, als sie zuvor beschleunigt wurde, weil der Halbmesser to nach und nach eben die Lagen gegen ihn annimmt, als vorhin; so daß also, wenn wieder beyde senkrecht auf einander zu stehen kommen, zum zweyten male $\gamma = 2\sqrt{\frac{2ag}{3f^2}}$ wird. Man betrachte nun in der Figur die Seite des Fadens, auf der die Rolle gezeichnet ist, als die entgegengesetzte; so geschieht jetzt ihre Umdrehung nach $t\upsilon r$, und der Faden wird also wieder aufgewickelt. Man hat daher gegenwärtig

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{4gT}{Mf},\ \frac{d\upsilon}{dt} = -2g + \frac{2gT}{M},$$ und wie vorhin $f.\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}$; also $\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{4}{3}g$, $\upsilon = \sqrt{\frac{8}{3}ag} - \frac{4}{3}gt$, $x = t\sqrt{\frac{8}{3}ag} - \frac{2}{3}gt^2$; mithin für $\upsilon = o$, $t = \sqrt{\frac{3a}{2g}}$, $x = a$, d. h. die Rolle steigt auf der andern Seite des Fadens an ihm zu eben der Höhe, von der sie auf der erstern Seite herabgesunken war.

§. 304.

Fig. 38. **Aufgabe.** Eine Kugel vom Halbmesser $= f$ wird in A auf die schiefe Ebene AB gelegt, die gegen die Horizontale BD unter dem Winkel ABD $= I$ geneigt

ist; man fragt, nach welchem Gesetze sie sich vermöge ihres Gewichtes M längs derselben herabbewegen werde.

Aufl. 1) Es sey C der Ort ihres Schwerpunktes für eine gegebene Zeit t; O der Punkt, worin sie alsdann die Ebene berührt; also OC senkrecht auf AB, und = f. Man setze aber für jetzt allgemein: OC = y, OA = x, und für eben den Zeitpunkt die Geschwindigkeit, womit sie nach Cc fortrückt, = v; ihre Winkelgeschwindigkeit um die durch C gehende, auf die Fläche AOC senkrechte, Axe = ♉, ihr Moment der Trägheit für dieselbe = Ma^2. Endlich sey noch Π der Druck, den sie in O auf die Fläche senkrecht ausübt, und gegenseitig nach OC leidet; und R der Widerstand, den ihr in eben dem Punkte die Friktion nach OA entgegensetzt.

2) Da der Winkel OCv, den die Normale der Fläche CO mit der Vertikale *Cv* macht, = I ist, so zerfällt das Gewicht der Kugel M nach CO und der darauf senkrechten, oder mit AB parallelen, Richtung Cc in die beyden Theile M Cos I und M Sin I. Es sind also die Kräfte, die auf ihrem Schwerpunkt wirken: nach AO = M Sin I und — R, und nach OC = Π und — M Cos I. Außerdem hat die Kraft R gegen ihre Umdrehungsaxe das Moment Rf; man erhält daher folgende Gleichungen (§. 301.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M \sin I - R),\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(\Pi - M \cos I),\ \text{und}\ \frac{d♉}{dt} = \frac{2gRf}{Ma^2}.$$

3) Zunächst folgt nun aus $y = f$, $\frac{dy}{dt} = o$, $\frac{d^2y}{dt^2} = o$, also $\Pi = M \text{ Cos } I$; oder: die Kugel drückt bey ihrer Bewegung eben so stark gegen die Fläche, als wenn sie auf ihr im Gleichgewichte gehalten würde. Ferner wird $v = \frac{dx}{dt}$; mithin $\frac{dv}{dt} = \frac{2g}{M}(M \text{ Sin } I - R)$.

4) Die Geschwindigkeit des Punktes O ist, vermöge der fortrückenden Bewegung der ganzen Kugel, nach $OB = v$, und, vermöge ihrer Umdrehung, nach $OA = \gamma f$; also seine eigentliche Geschwindigkeit nach $OB = v - \gamma f$. Es kann Fälle geben, wo sie gänzlich verschwindet, nie aber solche, wo sie negativ würde: denn daß sie geringer als v ist, bewirkt allein die Friktion, und diese ist, wie jedes andere Hinderniß, nur fähig, Bewegungen zu verzögern, auch wohl gänzlich zu hemmen, aber nicht, entgegengesetzte hervorzubringen.

5) Ist $v - \gamma f = o$, also der jedesmalige Berührungspunkt O in Ruhe, so übt die Friktion nicht mehr Widerstand aus, als erfordert wird, diese Ruhe zu unterhalten; ist dagegen $v > \gamma f$, oder bewegt sich der Punkt O nach OB wirklich, so ist nun der Widerstand, den sie leistet, nicht mehr relativ, sondern unbedingt ein bestimmter Theil vom Drucke Π, der $= \lambda\Pi$ seyn mag. Wir wollen zuerst prüfen, unter welchen Umständen letzterer Fall eintreten kann.

6) Die Annahme $v > \gamma f$ setzt voraus, daß

$\frac{dv}{dt} > f\frac{d\aleph}{dt}$, folglich $M \operatorname{Sin} I - R > \frac{Rf^2}{a^2}$, oder $M \operatorname{Sin} I > R\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$ sey. Zugleich ist aber alsdann $R = \lambda\Pi = \lambda M \operatorname{Cos} I$, mithin $M \operatorname{Sin} I > \lambda M \operatorname{Cos} I \cdot \left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$, oder $\operatorname{tang} I > \lambda\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$.

7) Für kleinere Neigungswinkel kann also v nicht $> \aleph f$ seyn. Da nun v nie $< \aleph f$ ist (4), so folgt, daß auf Ebenen, wofür $\operatorname{tang} I < \lambda\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$ ist, jederzeit $v = \aleph f$, oder die Bewegung der Kugel wälzend seyn müsse.

8) Man erhält demnach für Ebenen dieser Art:

$$M \operatorname{Sin} I - R = \frac{Rf^2}{a^2};\ M \operatorname{Sin} I = R\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right),\ \text{also}$$

$$\frac{d\aleph}{dt} = \frac{2gf \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2},\ \frac{dv}{dt} = \frac{2gf^2 \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2},\ v = \frac{2gtf^2 \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2},$$

und $x = \frac{gt^2f^2 \operatorname{Sin} I}{a^2 + f^2}$.

9) So lange also die Neigung der Fläche klein genug ist, daß die Kugel von ihr herabrollen kann, kommt die Größe der Friktion dabey gar nicht in Betracht; sondern die Geschwindigkeit derselben verhält sich dann allezeit zu der, womit sie von der Fläche herabgleiten würde, wenn beyde vollkommen glatt wären, wie $1 : 1 + \frac{a^2}{f^2}$.

10) Wenn tang $I > \lambda\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$ ist, so kann γ nicht mehr $= \frac{v}{f}$ bleiben, weil sonst $R > \lambda M \operatorname{Cos} I$ seyn müßte. Daher wird für diesen Fall $R = \lambda M \operatorname{Cos} I$, und folglich:

$$\frac{dv}{dt} = 2g\,(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I),\quad v = 2gt\,(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2\lambda g f \operatorname{Cos} I}{a^2},\quad \gamma = \frac{2\lambda g f t \operatorname{Cos} I}{a^2}.$$

§. 305.

Man sieht leicht, daß statt der Kugel jeder andere runde Körper angenommen werden könne, der durch seinen mittlern Querschnitt in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilt wird.

Für die Kugel ist (§. 212. 2.) $a^2 = \frac{2}{5} f^2$; also, so lange ihre Bewegung rollend bleibt, $v = \frac{10}{7} gt \operatorname{Sin} I$; und wenn man den Neigungswinkel, bey dem sie zu rollen aufhört, $= \varepsilon$ setzt, tang $\varepsilon = \frac{7}{2}\lambda$. So wäre z. B. für $\lambda = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = 49°24'$. Ferner wird bey größeren Neigungswinkeln

$$v = 2gt\,(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I),\quad \gamma = \frac{5\lambda g t \operatorname{Cos} I}{f}.$$

Die Umdrehung wird dann zwar, wie vorhin, gleichförmig beschleunigt, sie richtet sich aber zugleich nach der Größe der Friktion, und verhält sich außerdem, wie der Kosinus der Schiefe, und verkehrt, wie der Halbmesser der Kugel. Das Fortrücken hingegen leidet durch die Friktion eben die Verzögerung, wie bey andern Körpern, deren Bewegung gleitend ist.

Beym senkrechten Cylinder ist $a^2 = \frac{1}{2}f^2$, mithin tang $\varepsilon = 3\lambda$, und für Neigungswinkel, die kleiner als ε sind, $v = \frac{4}{3}gt \operatorname{Sin} I$. Für solche aber, die zwischen ε und 90° fallen, $\vartheta = \frac{4\lambda gt}{f}$.

Schwingung eines Pendels mit beweglicher Axe.

§. 306.

Bey der im achten Kapitel über den Pendelschlag angestellten Untersuchung haben wir die Axe, woran das Pendel aufgehängt wird, und seine Schwingungen verrichtet, als unbeweglich, und zugleich als eine Linie angenommen, die keine Ausdehnung hat. Beyde Voraussetzungen waren dort nöthig, um nicht gleich Anfangs die Betrachtung durch Nebenumstände zu erschweren: sie sind aber keinesweges der Wahrheit vollkommen gemäß. Denn einmal muß die Axe, da sie das ganze Gewicht des Pendels zu tragen hat, doch immer einige Dicke haben, und dann kann sie auch nie von ihren Pfannen rings umher so eng eingeschlossen werden, daß sich dadurch die ganze Bewegung auf eine bloße Umdrehung um ihre Mittelpunktslinie einschränken ließe, indem sonst bey der geringsten Ausdehnung der Axe an ihrem Umfange eine Klemmung entstehen würde, die die Umdrehung gänzlich verhinderte. Es muß also nothwendig irgend ein Spielraum zwischen ihrem Umfange und der innern Fläche der Unterlage befindlich seyn, und dies veranlaßt, daß die Axe sich nicht beständig über einerley Stelle dieser Unterlage dreht, sondern bald zur einen, bald zur andern Seite auf ihr fortrollt; welches auf die Bewegung des Pendels wenigstens so vielen Einfluß hat, daß man ihn in Fällen, wo größere Genauigkeit, als gewöhnlich, erfordert wird, nicht außer Acht lassen darf.

§. 307.

Fig. 42. **Aufgabe.** Es sey der Durchschnitt der Unterlage mit der Ebene des Schwunges ein Kreisbogen DAE, der in O seinen Mittelpunkt, und $OA = b$ zum Halbmesser hat. Das Pendel werde an seinem tiefsten Punkte A aufgehängt, und bekomme hierauf eine geringe Bewegung seitwärts. Man sucht die Beschaffenheit und Dauer seiner Schwingungen.

Aufl. 1) Anfangs wird also ein Schwerpunkt G, so wie der Mittelpunkt C seiner cylindrischen Axe in die durch O gehende Vertikale AOG fallen; man nenne die Entfernung beyder Punkte $CG = a$, den Halbmesser der Axe $CA = c$, und den Zwischenraum $OC = b - c = e$.

2) Nach Verlauf einer Zeit t sey das Pendel in die Lage cg gekommen, so daß jetzt sein Schwerpunkt in g, der Mittelpunkt der Axe in c, und der Punkt a, wo Axe und Unterlage sich berühren, in die Linie Oc fällt; so hat es sich während dieser Zeit nach der linken

Seite zu um die durch g gehende, auf die Fläche des Schwunges senkrechte, Axe um den Winkel $Glg = \varphi$ gedreht, und zugleicht ist der Punkt c durch den Bogen Cc fortgerückt, dem am Mittelpunkte O der Winkel $COc = \omega$ zugehört. Daher ist die Winkelgeschwindigkeit des Pendels um jene Axe $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$, und die absolute

Geschwindigkeit des Pendels $c = Oc \cdot \frac{d\omega}{dt} = e \cdot \frac{d\omega}{dt}$.

3) Mit dieser Geschwindigkeit dreht sich c, wegen der vollendenden Bewegung der Axe, um den Unterstützungspunkt a, und überhaupt besteht die augenblickliche Bewegung des ganzen Pendels in einer Umdrehung um die durch a gehende Berührungslinie. Da nun seine Winkelgeschwindigkeit um diese Linie eben dieselbe seyn muß, als um die durch g damit parallel gezogene Axe (§. 296.), so hat man $\gamma c = e \cdot \frac{d\omega}{dt}$, oder $cd\varphi = ed\omega$; und weil Anfangs φ und $\omega = 0$ sind, so ist auch $c\varphi = e\omega$.

4) Um den Ort g des Schwerpunkts für die gegebene Zeit zu bestimmen, fälle man aus g und c auf OG die Perpendikel gp, cq, und setze als Koordinaten desselben $Op = x$, $pg = y$. Nun ist $cq = Oc \operatorname{Sin} \omega =$ $e \operatorname{Sin} \omega$, $Oq = e \operatorname{Cos} \omega$, $cl = \frac{cq}{\operatorname{Sin} \varphi} = \frac{e \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} \varphi}$, ql $= cq \operatorname{Cot} \varphi = e \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cot} \varphi$, $lg = a - \frac{e \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} \varphi}$, $pg = lg \operatorname{Sin} \varphi = a \operatorname{Sin} \varphi - e \operatorname{Sin} \omega$, $pl = lg \operatorname{Cos}$ $\varphi = a \operatorname{Cos} \varphi - e \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cot} \varphi$; also erhält man $x =$

$Oq + ql + pl = e \cos\omega + a \cos\varphi$, und $y = pg = a \sin\varphi - e \sin\omega$.

5) Diese Gleichungen gelten allgemein für die Lage des Pendels bey jeder Abweichung desselben von der Vertikale. Wofern aber seine Schwingungen, wie wir hier annehmen wollen, in so kleinen Bogen geschehen, daß man die Quadrate von φ und ω weglassen kann, so ist es gestattet, $\sin\varphi$ und $\sin\omega = \varphi$ und ω, und $\cos\varphi$, $\cos\omega = 1$ zu setzen. Unter dieser Voraussetzung wird daher: $x = a + e$, und $y = a\varphi - e\omega = (a - c)\varphi$.

6) Die Kräfte, die auf das Pendel wirken, sind außer seinem Gewichte M, womit es vom Schwerpunkte g aus nach der Vertikale, oder parallel Op, herabzusinken strebt: der Druck Π, den die Axe von der Unterlage nach der Normale ac leidet, und der Widerstand der Reibung R, wodurch die Axe vom Herabgleiten nach der Tangente at zurückgehalten wird. Wiewohl die letztern beyden Kräfte nicht auf den Schwerpunkt gerichtet sind, so weiß man doch aus §. 299, daß sie eben den Einfluß auf das Fortrücken desselben haben, als wenn sie nach parallelen Richtungen unmittelbar auf ihn angebracht wären.

7) Man zerlege nun den Druck Π in einen vertikalen, oder parallel mit pO, $= \Pi \cos\omega = \Pi$, und in einen horizontalen, parallel mit $pg = \Pi \sin\omega = \Pi\omega$; ferner die Friktion R in einen Theil, parallel mit $pO = R \sin\omega = R\omega$, und in einen, parallel mit $gp = R \cos\omega = R$. Diese einzelnen Kräfte unter sich, und

mit dem Gewichte M verbunden, geben nach Op die Kraft $M - \Pi - R\omega$, und nach pg die Kraft $\Pi\omega - R$. Es entstehen daher folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M - \Pi - R\omega), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(\Pi\omega - R),$$

oder, da $x = a + e$, und $y = (a - c)\varphi$, also $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = (a - c)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ist:

$$M - \Pi - R\omega = 0, \text{ woraus } \Pi = M - R\omega \text{ folgt, und}$$

$$(a - c)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M\omega - R) = \frac{2g}{eM}[Mc\varphi - Re].$$

8) Es bleibt jetzt noch übrig, die Umdrehungsmomente der beyden Kräfte Π und R gegen die durch g gehende Axe des Pendels zu finden. Zu dem Ende zerlege man den Druck Π in einen nach $cg = \Pi \operatorname{Cos} acg = \Pi \operatorname{Cos}(\varphi + \omega)$, und in einen darauf senkrechten $= \Pi \operatorname{Sin}(\varphi + \omega) = \Pi(\varphi + \omega)$. Von diesen ist der letztere nur allein wirksam, das Pendel um die erwähnte Axe zu drehen, und hat gegen sie das Moment $a\Pi(\varphi + \omega)$. Ferner setze man, die Tangente at theile, rückwärts verlängert, die Linie cg in die Theile p und q, und ein Perpendikel aus g auf sie gefällt, sey $= w$, so hat man $c : p = w : q$, oder $wp = cq$, und $p + q = a$, also $(w + c)p = ca$. Außerdem ist noch $c = p \operatorname{Cos}(\varphi + \omega) = p$, mithin $w + c = a$, $w = a - c$, und folglich das Moment der Friktion $R = R(a - c)$. Hiervon das erstere, weil es diesem entgegengesetzt ist, abgezogen, bleibt nach der Seite zu, wohin das Pendel

sich dreht, das Moment $R(a-c) - a\Pi(\varphi + \omega)$ übrig.

9) Wird demnach das Moment der Trägheit des Pendels für eben die Axe $= Mh^2$ gesetzt, so bekommt man:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g}{Mh^2}[R(a-c) - a\Pi(\varphi + \omega)]$$

oder, wenn man für $\frac{d\gamma}{dt}$, ω und Π ihre Werthe $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{c\varphi}{e}$ und $M - R\omega$ substituirt:

$$h^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2g}{eM}[Re(a-c) - Ma\varphi(c+e)].$$

10. Diese Gleichung mit ersterer (7) verbunden, giebt:

$$Mh^2c\varphi - Reh^2 = Re(a-c)^2 - Mab\varphi(a-c),$$

woraus

$$Re = M\varphi \cdot [\frac{h^2c + ab(a-c)}{h^2 + (a-c)^2}] \text{ folgt.}$$

11) Hierdurch verwandelt sich jene Gleichung (7) in folgende:

$$\frac{e}{2g} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi \cdot [\frac{(a-c)c - ab}{h^2 + (a-c)^2}] = -\varphi[\frac{c^2 + ae}{h^2 + (a-c)^2}].$$

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{2g}{e} \cdot (\frac{c^2 + ae}{h^2 + (a-c)^2}) = n^2$, multiplicirt beyde Seiten durch $d\varphi$, und integrirt alsdann, so wird:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = C - n^2\varphi^2.$$

12) Die

12) Die Konstante C bestimmt sich aus der Winkelgeschwindigkeit des Pendels, die ihm Anfangs bey seiner vertikalen Lage mitgetheilt ist. Nennt man nemlich diese $= \gamma$, so erhält man für $\varphi = 0$, $\gamma^2 = C$, mithin $\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \vartheta^2 = \gamma^2 - n^2\varphi^2$.

13) Für $\vartheta = 0$, wird $\varphi = \frac{\gamma}{n}$. Dies ist also die größte Abweichung von der Vertikale OG, zu der das Pendel gelangt, oder die halbe Weite seines Schwingungsbogens: denn da $y = (a - c)\,\varphi$ (5), folglich $\frac{dy}{dt} = (a - c)\frac{d\varphi}{dt} = \vartheta\,(a - c)$ ist, so hört mit seiner Umdrehung zugleich auch das Fortrücken seines Schwerpunkts auf.

14) Aus (12) bekommt man gegenseitig:

$$n dt = \frac{n d\varphi}{\gamma\sqrt{\left(1 - \frac{n^2\varphi^2}{\gamma^2}\right)}},$$

also: $t = \frac{1}{n} . \operatorname{arc\,Sin} \frac{n\varphi}{\gamma}$.

Hierin $\varphi = \frac{\gamma}{n}$ gesetzt, giebt die halbe Dauer der Schwingung

$$t = \frac{\pi}{2n} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{e\,(h^2 + (a - e)^2)}{2g\,(c^2 + ac)}}.$$

§. 308.

1. Um den Unterschied deutlicher wahrzunehmen,

der durch die Dicke und Bewegung der Axe in der Schwingungszeit hervorgebracht wird, wenn man die Länge des einfachen Pendels, das seine Schwingungen mit dem hier betrachteten in einerley Zeit verrichtet $= l$; so wird $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, mithin $l = \frac{e(h^2 + (a-c)^2)}{c^2 + ae}$, und wenn man die Distanz AG des Schwerpunkts G vom Aufhängepunkte $A = f$ setzt, $a = f + c$, $ae + c^2 = ef + c\,(c + e) = ef + bc$; folglich $l = \frac{e(f^2 + h^2)}{ef + bc}$.

2. Wenn daher c abnimmt, wächst l, und zwar, bey unendlicher Abnahme von c, bis zur Grenze $f + \frac{h^2}{f}$; welches eben der Werth ist, den wir für l im §. 225. unter der Voraussetzung, daß die Axe eine bloße Linie sey, gefunden haben. Die Zeit der Schwingung ist demnach für ein Pendel, dessen Axe eine gegebene Dicke $= 2c$ hat, allemal kleiner, als wenn $c = o$ wäre, und zwar in dem Verhältnisse wie 1 zu $\sqrt{(1 + \frac{bc}{ef})}$.

3. Man sieht daraus ferner, daß auch die Weite der Oeffnung, worin die Axe läuft, auf die Dauer der Schwingung einen sehr merklichen Einfluß habe. Für $b = c$ wären l und $t = o$, d. h. die Bewegung des Pendels würde gänzlich gehemmt, wie auch schon an sich klar ist. So wie aber b zunimmt, wird bey eben der Dicke der Axe zugleich e, folglich auch l größer,

und für ein unendliches b, oder für eine ebene Unterlage, erhält man $l = \frac{f^2 + h^2}{f + c}$.

Fernere Betrachtung der freyen Bewegung des Körpers, wenn die Kräfte, denen er ausgesetzt ist, willkührliche Richtungen haben.

§. 309.

Fig. 43. **Aufgabe.** Auf einen festen Körper, dessen Masse $= M$ ist, wirkt die Kraft V nach einer auf die Ebene AIB der beyden freyen Axen IA und IB senkrechten Richtung Ss; man sucht, welche Aenderungen sie während des Zeittheils dt in seiner Bewegung hervorbringt.

Aufl. 1) Es sey S der Punkt, wo ihre Richtung in die Ebene AIB eintrift, und aus ihm SP, SQ auf IA und IB senkrecht; so sind ihre Momente gegen diese beyden Axen $= V \cdot SP$ und $V \cdot SQ$. Wir wollen sie $= P$ und Q, und die Momente der Trägheit des Körpers für eben die Axen $= Ma^2$ und Mb^2 setzen.

2) Die beyden Diagonalen SI und PQ des Rechtecks $IPSQ$ halbiren einander in ihrem Durchschnittspunkte O gegenseitig; es würde also an der erstern IS eine Kraft $= V$ im Endpunkte I, parallel Ss, und die doppelte Kraft $2V$ in der Mitte O nach entgegengesetzter Richtung oO angebracht, der gegebenen Kraft V das Gleichgewicht halten. Daher sind eben die Kräfte V und $2V$ nach den umgekehrten Richtungen IC und

Oo ihr äquipollent, und können folglich für sie substituirt werden.

3) Auf gleiche Art läßt sich auch noch die Kraft 2V in die beyden Kräfte V und V auf die Endpunkte Q und P der Diagonale QP nach den parallelen Richtungen Qq und Pq vertheilen; so daß also statt der einen Kraft V nach Ss drey andere Kräfte, jede = V in den Punkten Q, P und I nach Qq, Pp und IC angebracht werden können, die in Verbindung eben die gegebene Kraft für sich allein auf ihn ausübt. Wir wollen nun den Erfolg von diesen drey Kräften der Reihe nach einzeln durchgehen.

4) Die Richtung Qq der erstern fällt in die Ebene BIC der beyden freyen Axen IB und IC, und ihr Moment gegen die dritte IA ist $= V \cdot QI = V \cdot SP = P$; daher vermehrt sie während des Zeittheils dt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um diese Axe um $\frac{2gPdt}{Ma^2}$ (§. 300. 2.), und ertheilt ihm zugleich in Ansehung seines Fortrückens eine Geschwindigkeit nach Qq oder $CI = \frac{2gVdt}{M}$.

5) Eben so liegt die Richtung Pp der zweyten Kraft in der Ebene AIB der beyden freyen Axen IA und IC, und ihr Moment gegen die dritte IB ist $= V \cdot PI = V \cdot SQ = Q$; also bewirkt sie in der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um diese Axe eine Aenderung

$= \frac{2gQdt}{Mb^2}$, und beschleunigt zugleich sein Fortrücken nach Pp oder CI um $\frac{2gVdt}{M}$.

6) Die dritte Kraft hat auf die Umdrehung des Körpers, da ihre Richtung durch seinen Schwerpunkt I geht, keinen Einfluß; sondern es entsteht bloß durch sie während des Zeittheils dt nach der entgegengesetzten Richtung IC die Geschwindigkeit $= \frac{2gVdt}{M}$.

7) Alles dreyes unter sich verbunden, giebt demnach die gesammte augenblickliche Wirkung der gegebenen Kraft; die also darin besteht, daß sie in den Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen IA und IB die Aenderungen $\frac{2gPdt}{Ma^2}$ und $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ hervorbringt, und zugleich seine fortgehende Bewegung nach der Richtung CI, parallel der ihrigen Ss, um $\frac{4gVdt}{M} - \frac{2gVdt}{M}$ $= \frac{2gVdt}{M}$ beschleunigt, d. h.

8) Der Körper wird durch diese Kraft auf gleiche Art gedreht, als wenn die beyden freyen Axen desselben IA und IB, einzeln genommen, befestigt wären, und sein Schwerpunkt eben so fortgetrieben, als wenn durch ihn ihre Richtung unmittelbar durchginge.

§. 310.

Man setze nun, die Kraft wirke auf den Körper nach jeder andern willkührlichen Richtung; so kann man sie in drey andere Kräfte zerlegen, deren Richtungen mit den drey freyen Axen desselben IA, IB, IC parallel sind, und nach vorigem §. die Wirkung jeder einzelnen auf ihn bestimmen. Jede derselben hat nemlich zwey Momente, und zwar gegen die beyden Hauptaxen, auf deren Ebene sie senkrecht ist; daher entspringen aus ihr zwey Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um diese Axen, die den beyden Momenten proportional sind. Es folgt also, daß man nur nöthig habe, die Momente gegen einerley Axe, z. B. gegen IA, von je zweyen zusammen zu nehmen, und daß alsdann die gesammte Aenderung der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um IA dieser Summe, als einfachem Momente, ebenfalls proportional sey.

Heißen demnach P, Q, R die vereinigten Momente der erwähnten drey Kräfte gegen die drey Hauptaxen IA, IB und IC, und Ma^2, Mb^2, Mc^2, die Momente der Trägheit des Körpers für eben diese Axen, so sind die augenblicklichen Aenderungen seiner Winkelgeschwindigkeiten um dieselben, die durch jene Kräfte hervorgebracht werden, $= \frac{2gPdt}{Ma^2}$, $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ und $\frac{2gRdt}{Mc^2}$.

Außerdem wird aber auch noch die fortrückende Bewegung des Körpers eben so geändert, als wenn die gegebene Kraft nach paralleler Richtung unmittelbar auf seinen Schwerpunkt wirkte.

§. 311.

Fig. 44. **Aufgabe.** Der Körper drehe sich im gegenwärtigen Augenblicke mit der Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$ um eine Axe IG, die mit seinen drey Hauptaxen IA, IB, IC die Winkel α, β, γ einschließt; man sucht die Aenderungen, die durch die Schwungkräfte seiner einzelnen Elemente während des nächsten Zeittheils dt in seiner Bewegung bewirkt werden.

Aufl 1) Die Schwungkraft eines solchen Elementes dM, dessen Ort Z von der Axe IG um $Zr = r$ entfernt liegt, ist $= \frac{\gamma^2}{2g} \cdot rdM$, und ihre Richtung $rZ\varrho$ auf IG senkrecht. Um sie nach den drey Richtungen, Za, Zb, Zc, parallel den drey Hauptaxen des Körpers zerlegen zu können, ziehe man für den Punkt Z die rechtwinklichten Koordinaten $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; ferner für r drey andere, mit jenen parallele, $Ip = X$, $pq = Y$, $qr = Z$, und überdies aus r und q auf YZ und XY die Perpendikel ro und qn; so zerfällt jene Kraft zunächst in eine, parallel $ro = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot rdM \operatorname{Cos} Zro = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot ro \cdot dM$, und in eine darauf senkrechte, parallel $IC = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot Zo \cdot dM$, wovon die erstere noch eine, parallel $AI = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot dM \cdot ro \operatorname{Cos} Yqn = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot qndM$, und in eine darauf senkrechte, oder parallel $IB = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot YndM$ giebt.

2) Da nun $qn = X - x$, $Yn = y - Y$, $Zo = z - Z$, so sind die Kräfte, die aus der Schwungkraft des Elementes dM entspringen, folgende:

nach Za, parallel IA, die Kraft $= \frac{\gamma^2}{2g}(x - X)\,dM$

nach Zb . . IB . . . $= \frac{\gamma^2}{2g}(y - Y)\,dM$

nach Zc . . IC . . . $= \frac{\gamma^2}{2g}(z - Z)\,dM$.

3) Das Moment der erstern gegen die Axe IB, nach der Seite CA zu, ist $= \frac{\gamma^2}{2g}(x - X)\,z\,dM$, und gegen IC nach BA $= \frac{\gamma^2}{2g}(x - X)\,y\,dM$.

Das Moment der zweyten gegen IA nach CB $= \frac{\gamma^2}{2g}(y - Y)\,z\,dM$, und gegen IC nach AB $= \frac{\gamma^2}{2g}(y - Y)\,x\,dM$.

Das Moment der dritten gegen IA nach BC $= \frac{\gamma^2}{2g}(z - Z)\,y\,dM$, und gegen IB nach AC $= \frac{\gamma^2}{2g}(z - Z)\,x\,dM$.

4) Wenn man nun von diesen Momenten jedes Paar, das sich auf einerley Axe bezieht, verbindet, und für alle Elemente des Körpers summirt, so wird das gesammte Momene:

P aller Schwungkräfte gegen IA nach BC zu $= \frac{\gamma^2}{2g}$
$\int (zY - yZ)\, dM$

Q . . . . IB nach CA zu $= \frac{\gamma^2}{2g}$
$\int (xZ - zX)\, dM$

R . . . . IC nach AB zu $= \frac{\gamma^2}{2g}$
$\int (yX - xY)\, dM.$

5) Um die Werthe der Koordinaten X, Y, Z zu bestimmen, nenne man vorläufig $IM = w$, und die Winkel qIA, rIq, wie oben (§. 281.) $= \eta$ und ϑ; so hat man $Iq = w \operatorname{Cos} \vartheta$, und $qr = w \operatorname{Sin} \vartheta$; ferner $pq = Iq \operatorname{Sin} \eta = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \eta$, $Ip = Iq \operatorname{Cos} \eta = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \eta$; folglich $X = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \eta = w \operatorname{Cos} \alpha$, $Y = w \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \eta = w \operatorname{Cos} \beta$, und $Z = w \operatorname{Sin} \vartheta = w \operatorname{Cos} \gamma$ (§. 287. 2.). Zugleich ist aber (ebendas.) $w = x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma$; also wird:

$$X = x \operatorname{Cos} \alpha^2 + y \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma$$
$$Y = x \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta + y \operatorname{Cos} \beta^2 + z \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$
$$Z = x \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma + y \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma + z \operatorname{Cos} \gamma^2.$$

6) Dies für X, Y und Z in (4) substituirt, und, dem Erfordernisse der freyen Axen gemäß, $\int xy\,dM$, $\int xz\,dM$ und $\int yz\,dM = 0$ gesetzt, giebt:

$$2gP = \gamma^2 \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma \int (z^2 - y^2)\, dM$$
$$2gQ = \gamma^2 \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma \int (x^2 - z^2)\, dM$$
$$2gR = \gamma^2 \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta \int (y^2 - x^2)\, dM.$$

7) Heißen nun, wie vorhin, die Momente der

Trägheit des Körpers in Beziehung auf die drey Hauptaxen $= Ma^2$, Mb^2 und Mc^2, so ist (§. 287. 4.) $\int (z^2 - y^2)\, dM = C - B = (b^2 - c^2) M$, $\int (x^2 - z^2)\, dM = A - C = (c^2 - a^2)\, dM$, und $\int (y^2 - x^2)\, dM = B - A = (a^2 - b^2) M$, also:

$$2gP = \gamma^2 (b^2 - c^2)\, M \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$
$$2gQ = \gamma^2 (c^2 - a^2)\, M \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma$$
$$2gR = \gamma^2 (a^2 - b^2)\, M \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta,$$

woraus innerhalb des Zeittheils dt um diese drey Axen die Winkelgeschwindigkeiten $\frac{2gPdt}{Ma^2}$, $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ und $\frac{2gRdt}{Mc^2}$ entspringen.

8. Damit man erfahre, ob die Schwungkräfte auch Aenderungen in der fortrückenden Bewegung des Körpers veranlassen, müssen noch die drey Kräfte (12) für alle Elemente desselben einzeln summirt werden. Die Summe der erstern ist $= \frac{\gamma^2}{2g} \int (x - X)\, dM$, und wenn man darin für X seinen Werth aus (5) setzt, wird darin das Integral $= \operatorname{Sin} \alpha^2 \int x dM - \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta \int y dM - \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma \int z dM = 0$, weil $\int x dM$, $\int y dM$, $\int z dM = 0$ sind. Eben so findet man, daß auch die Summen der andern beyden Kräfte für sich verschwinden. Es folgt also, daß die Schwungkräfte auf das Fortrücken des Körpers gar keinen Einfluß haben.

§. 312.

Es mögen nun außerdem noch so viele Kräfte auf den Körper wirken, als man will, so kommen doch nur in Hinsicht auf seine Umdrehung von jeder einzelnen Kraft die drey Momente gegen die drey Hauptaxen desselben in Betracht, und man findet solche nach §. 310., wenn man die Kraft in drey andere, parallel jenen Axen, zerlegt. Diese Momente kann man alsdann für jede Axe besonders von allen Kräften zusammennehmen, wodurch man also zuletzt drey einfache Momente P, Q, R erhält, denen die gesammte augenblickliche Wirkung aller Kräfte proportional ist. Es sind nemlich die Winkelgeschwindigkeiten, die sie mit Inbegriff der Schwungkräfte den Körper während des Zeittheils dt um seine drey Hauptaxen ertheilen, folgende:

$$\text{um die Axe IA} = \frac{2gPdt}{Ma^2} + \frac{(b^2-c^2)}{a^2} \cdot \gamma^2 \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma\, dt$$

$$\ldots \text{IB} = \frac{2gQdt}{Mb^2} + \frac{(c^2-a^2)}{b^2} \cdot \gamma^2 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma\, dt$$

$$\ldots \text{IC} = \frac{2gRdt}{Mc^2} + \frac{(a^2-b^2)}{c^2} \cdot \gamma^2 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta\, dt.$$

§. 313.

Aufgabe. Aus den gegebenen Momenten P, Q, R die augenblicklichen Aenderungen zu finden, die sowohl die Winkelgeschwindigkeit γ des Körpers, wie auch die Lage seiner Umdrehungsaxe IG gegen IA, IB und IC leidet.

Aufl. 1) Die Winkelgeschwindigkeit γ, womit der Körper im gegenwärtigen Augenblicke sich um die Axe IG drehet, zerfällt in drey andere um die drey Hauptaxen, $= \gamma \operatorname{Cos}\alpha$, $\gamma \operatorname{Cos}\beta$ und $\gamma \operatorname{Cos}\gamma$

(§. 291.), und die Aenderungen derselben im nächsten dt sind:

$$d(\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\alpha) = d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\alpha d\alpha$$
$$d(\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\beta) = d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\beta - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\beta d\beta$$
$$d(\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\gamma) = d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\gamma d\gamma.$$

2) Diese entstehen nun theils durch die von außen auf den Körper wirkenden Kräfte, deren Momente P, Q, R gegen seine Hauptaxen gegeben sind, theils aber auch durch die Schwungkräfte seiner einzelnen Elemente; daher müssen sie den im vorigen § gefundenen Winkelgeschwindigkeiten gleich seyn. Man erhält also:

$$d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\alpha d\alpha = \frac{2gPdt}{Ma^2} + \frac{b^2-c^2}{a^2}\,.\,\text{♉}^2\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma dt$$

$$d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\beta - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\beta d\beta = \frac{2gQdt}{Mb^2} + \frac{c^2-a^2}{b^2}\,.\,\text{♉}^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma dt$$

$$d\text{♉}\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \text{♉}\,\mathrm{Sin}\,\gamma d\gamma = \frac{2gRdt}{Mc^2} + \frac{a^2-b^2}{c^2}\,.\,\text{♉}^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta dt.$$

3) Man multiplicire diese drey Gleichungen der Reihe nach durch $\mathrm{Cos}\,\alpha$, $\mathrm{Cos}\,\beta$, $\mathrm{Cos}\,\gamma$, und addire sie dann zusammen; so wird das erste Glied der linken Seite $= d\text{♉}\,(\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + \mathrm{Cos}\,\beta^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma^2) = d\text{♉}$; das zweyte $= \text{♉}d\,(\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + \mathrm{Cos}\,\beta^2 + \mathrm{Cos}\,\gamma^2) = o$, und der Zähler des vordern Faktors vom letzten Gliede auf der rechten Seite: $b^4c^2 - c^4b^2 + c^4a^2 - a^4c^2 + a^4b^2 - b^4a^2 = (c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)$, folglich:

$$d\gamma = \frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\,.\,\gamma^2 dt \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma + \frac{2g\,dt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha}{a^2}+\frac{Q\cos\beta}{b^2}+\frac{R\cos\gamma}{c^2}\right)$$

worin außer $d\gamma$ kein anderes Differenzial, als das der Zeit, vorkommt.

4) Um auch die Differenziale der Winkel α, β und γ abgesondert zu erhalten, substituire man den für $d\gamma$ gefundenen Werth in den erstern drey Gleichungen, so bekommt man:

$$\gamma \sin\alpha\, d\alpha = \frac{c^2-b^2}{a^2}\,.\,\gamma^2 dt \cos\beta \cos\gamma \left(1+\frac{(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2c^2}\cos\alpha^2\right) + \frac{2g\,dt}{M}\left(\frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{b^2}+\frac{R\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}-\frac{P\sin\alpha^2}{a^2}\right)$$

$$\gamma \sin\beta\, d\beta = \frac{a^2-b^2}{c^2}\,.\,\gamma^2 dt \cos\alpha \cos\gamma \left(1+\frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{a^2c^2}\cos\beta^2\right) + \frac{2g\,dt}{M}\left(\frac{R\cos\beta\cos\gamma}{c^2}+\frac{P\cos\alpha\cos\beta}{a^2}-\frac{Q\sin\beta^2}{b^2}\right)$$

$$\gamma \sin\gamma\, d\gamma = \frac{b^2-a^2}{c^2}\,.\,\gamma^2 dt \cos\alpha \cos\beta \left(1+\frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2}\cos\gamma^2\right) + \frac{2g\,dt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}+\frac{Q\cos\beta\cos\gamma}{b^2}-\frac{R\sin\gamma^2}{c^2}\right).\ ^{*)}$$

§. 314.

Ließen sich diese vier Gleichungen unmittelbar integriren, so bekäme man dadurch γ, α, β und γ, durch t ausgedrückt, d. h. man wüßte für jeden Zeitpunkt der Bewegung die Lage der Umdrehungsaxe gegen die drey Hauptaxen, und die Winkelgeschwindigkeit, womit sich

*) Eben diese Gleichungen findet Euler auf einem Wege, der von dem meinigen ganz verschieden ist. — M. s. d. Theor. motus corp. solid. Cap. XV. pag. 346.

der Körper um dieselbe drehete; allein da die veränderlichen Größen ϑ, α, β, γ selbst in ihnen vorkommen, so sind sie zu diesem Zwecke nicht brauchbar. Man nehme statt deren wieder die erstern drey Gleichungen (2), und setze darin die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um seine Hauptaxen: $\vartheta \operatorname{Cos} \alpha = x$, $\vartheta \operatorname{Cos} \beta = y$, $\vartheta \operatorname{Cos} \gamma = z$, so verwandeln sie sich in folgende:

$$dx + \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} \cdot yzdt = \frac{2gPdt}{Ma^2}$$

$$dy + \frac{(a^2 - c^2)}{b^2} \cdot xzdt = \frac{2gQdt}{Mb^2}$$

$$dz + \frac{(b^2 - a^2)}{c^2} \cdot xydt = \frac{2gRdt}{Mc^2}$$

Wo fern nun nicht etwa die Momente P, Q, R noch von den Winkeln α, β, γ abhängen, enthalten diese Gleichungen außer t bloß x, y und z als veränderliche Größen, und man kann sie leicht so mit einander verbinden, daß jede dieser Größen einzeln durch t ausgedrückt wird.

§. 315.

Wir wollen den Fall näher betrachten, wo der Körper keinen andern, als solchen Kräften ausgesetzt ist, deren Richtungen durch seinen Schwerpunkt gehen. Alsdann sind folglich P, Q und $R = 0$, und man erhält zunächst aus den erstern beyden Gleichungen:

$$\frac{(a^2 - c^2)}{b^2} \cdot xdx - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} \cdot ydy = 0;$$

wovon das Integral

$$\frac{(a^2 - c^2)}{b^2} . x^2 - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} . y^2 = \text{const ist.}$$

Ferner aus der erstern und dritten

$$\frac{(b^2 - a^2)}{c^2} . xdx - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} . zdz = o,$$

oder $\frac{(b^2 - a^2)}{c^2} x^2 - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} z^2 = \text{Const.}$

Man setze nun, es sey zu Anfange der Bewegung $x = e$, $y = f$, $z = h$ gewesen, und nenne außerdem zur Abkürzung:

$$\frac{a^2}{c^2 - b^2} = A, \quad \frac{b^2}{a^2 - c^2} = B, \quad \frac{c^2}{b^2 - a^2} = C;$$

so wird:

$$Ax^2 - By^2 = Ae^2 - Bf^2$$

$$Ax^2 - Bz^2 = Ae^2 - Ch^2, \text{ mithin}$$

$y\sqrt{B} = \sqrt{(Ax^2 - Ae^2 + Bf^2)}$, und $z\sqrt{C} = \sqrt{(Ax^2 - Ae^2 + Ch^2)}$.

Diese Werthe für y und z in die erste Gleichung: $Adx + yzdt = o$ substituirt, geben:

$$dt = \frac{- Adx\sqrt{BC}}{\sqrt{(Ax^2 - Ae^2 + Bf^2)(Ax^2 - Ae^2 + Ch^2)}}$$

woraus durch Integration gefunden wird, wie t von x, oder gegenseitig x, y und z von t abhängt.

Hieraus ergiebt sich dann ferner $\gamma = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, und $\text{Cos}\,\alpha = \frac{x}{\gamma}$, $\text{Cos}\,\beta = \frac{y}{\gamma}$, $\text{Cos}\,\gamma = \frac{z}{\gamma}$.

§. 316.

Nachdem man auf solche Weise die drey Winkelgeschwindigkeiten x, y und z durch die Zeit t bestimmt hat, bleibt endlich noch übrig, auch die absolute Lage des ganzen Körpers, oder die Abweichungen seiner Hauptaxen von dreyen unveränderlichen Richtungslinien für eben die Zeit t anzugeben. Am deutlichsten lassen sich diese Abweichungen als Bogen auf der Oberfläche einer Kugel darstellen, die im Schwerpunkte des Körpers ihren Mittelpunkt hat, und mit demselben zugleich fortrückt, oder dabey keine Umdrehung leidet, so daß ihre Halbmesser und größten Kreise sich stets parallel bleiben, folglich im absoluten Raume beständig einerley Lage behalten.

Fig. 45. 1) Es sey AB der Bogen eines solchen größten Kreises; A ein bestimmter Punkt in demselben. Man ziehe aus den Punkten M, N und O, worin die Hauptaxen des Körpers bey ihrer gegenwärtigen Lage die Oberfläche der Kugel treffen, die Bogen MA, NA, OA, und setze diese $= l$, m, n. Ueberdies sey noch der Winkel $MAB = \lambda$, $NAB = \mu$, $OAB = \nu$.

2) Im nächsten dt beschreibt nun der Körper um die letztern beyden Axen, und mit ihm der Punkt M um N und O, die kleinen Bogenstücke $Mo = ydt$, $Mn = zdt$, welches sowohl in seiner Entfernung von $A = l$, wie auch im Winkel $MAB = \lambda$, die augenblicklichen Aenderungen dl und $d\lambda$ hervorbringt.

3) Um diese zu bestimmen, ziehe man Mp und

nq

nq auf AM senkrecht; so ist $oMp = nMq = AMN$, und im Dreiecke AMN

$$\mathrm{Cos}\, AMN = \frac{\mathrm{Cos}\, AN - \mathrm{Cos}\, AM\, \mathrm{Cos}\, MN}{\mathrm{Sin}\, AM\, \mathrm{Sin}\, MN} = \frac{\mathrm{Cos}\, m}{\mathrm{Sin}\, l};$$

ferner $\mathrm{Sin}\, AMN = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{Cos}\, m^2}{\mathrm{Sin}\, l^2}\right)} = \frac{1}{\mathrm{Sin}\, l} \sqrt{}$

$[1 - (\mathrm{Cos}\, l^2 + \mathrm{Cos}\, m^2)], = \frac{\mathrm{Cos}\, n}{\mathrm{Sin}\, l}$, weil $\mathrm{Cos}\, l^2 + \mathrm{Cos}\, m^2 + \mathrm{Cos}\, n^2 = 1$ ist; mithin

$$dl = Mq - op = Mn\, \mathrm{Cos}\, nMq - Mo\, \mathrm{Sin}\, oMp = \frac{dt}{\mathrm{Sin}\, l} (z\, \mathrm{Cos}\, m - y\, \mathrm{Cos}\, n)$$

oder $dl\, \mathrm{Sin}\, l = dt\, (z\, \mathrm{Cos}\, m - y\, \mathrm{Cos}\, n)$

und $d\lambda\, \mathrm{Sin}\, l = -(Mp + nq) = -Mo\, \mathrm{Cos}\, oMp - Mn\, \mathrm{Sin}\, nMq = -\frac{dt}{\mathrm{Sin}\, l} (y\, \mathrm{Cos}\, m + z\, \mathrm{Cos}\, n)$, oder:

$$d\lambda\, \mathrm{Sin}\, l^2 = -dt\, (y\, \mathrm{Cos}\, m + z\, \mathrm{Cos}\, n)$$

4) Auf gleiche Art wird in Rücksicht der andern beyden Axen:

$dm\, \mathrm{Sin}\, m = dt\, (x\, \mathrm{Cos}\, n - z\, \mathrm{Cos}\, l)$; $dn\, \mathrm{Sin}\, n = dt\, (y\, \mathrm{Cos}\, l - x\, \mathrm{Cos}\, m)$; $d\mu\, \mathrm{Sin}\, m^2 = -dt\, (z\, \mathrm{Cos}\, n + x\, \mathrm{Cos}\, l)$; $d\nu\, \mathrm{Sin}\, n^2 = -dt\, (x\, \mathrm{Cos}\, l + y\, \mathrm{Cos}\, m)$.

5) Man kann diese Formeln noch dadurch vereinfachen, daß man $\mathrm{Cos}\, l = p$, $\mathrm{Cos}\, m = q$, $\mathrm{Cos}\, n = r$ setzt; dies giebt nemlich $dp = dt\, (zq - yr)$, $dq = dt\, (xr - zp)$, $dr = dt\, (yp - xq)$, und $d\lambda\, (1 - p^2) + dt\, (yq + zr) = 0$, $d\mu\, (1 - q^2)$

$+ dt(zr + xp) = 0, \; d\nu(1 - q^2) + dt(xp + yq) = 0.$

Anmerk. Eine der vorzüglichsten Anwendungen dessen, was in den letztern acht §§. hier vorgetragen ist, gehört in die Astronomie, und betrifft die Aenderungen, die in der Lage der Erd- und Mondaxe durch die übrigen Himmelskörper unseres Sonnensystems hervorgebracht werden. Da aber diese Untersuchungen, wenn sie etwas mehr, als eine bloße Uebersicht gewähren sollen, weitläufige Rechnungen veranlassen, und dabey manche andere Kenntnisse voraussetzen, so sehe ich mich genöthigt, sie ganz zu übergehen, und desfalls auf Schriften zu verweisen, die davon nach gegenwärtiger Theorie ausführlich handeln. Dahin gehören vorzüglich:

Schubert theoretische Astronomie, III. Th. Kap. 5 und 6.

Cousin, introduction a l'etude de l'Astronomie Physique. Par. 1787.

Euler Theor. mot. corp. rigid. Cap. XVI.

Eilftes Kapitel.

Von der Bewegung biegsamer und elastischer Körper.

---

§. 317.

Die biegsamen und elastischen Körper unterscheiden sich darin wesentlich von den festen Körpern, daß sie sich an jeder Stelle, und nach allen Seiten zu, mehr oder weniger krümmen lassen, ohne daß dadurch der Zusammenhang ihrer Theile aufgehoben wird; daher denn bey der Bewegung derselben nicht bloß in ihrer Lage überhaupt, wie bey festen Körpern, sondern auch in den gegenseitigen Lagen ihrer einzelnen Theile unter sich, Aenderungen der mannigfaltigen Art denkbar sind. Aus diesem Grunde ist nicht leicht vorauszusehen, wie sich ihre Bewegung unter ein solches allgemeines Gesetz bringen ließe, das jede Gestalt und nachmalige Verwandlung derselben in sich schlösse; auch haben **Euler** und **Bernoulli**, die Einzigen, die bisher diesen Zweig der Mechanik mit glücklichem Erfolge bearbeitet haben, uns bloß einzelne Bruchstücke davon geliefert, die sich größtentheils nur auf Bewegungen biegsamer Körper von cylindrischer oder prismatischer Form in einer Ebene beziehen, wobey also ihre Krümmung von einfacher Art bleibt. Indeß ist doch auch schon hierbey die Verschiedenheit der Umstände so groß, und die Anwendung davon so einfach, daß wir zur Vermeidung zu großer Weitläuftigkeit uns nothwendig auf diesen besondern Fall einschränken müssen.

§. 318.

Vollkommen biegsam könnte man denjenigen Körper nennen, bey dem die geringste Kraft hinreichend wäre, ihm allenthalben, und nach allen Seiten zu, jede beliebige Krümmung zu geben. Diese Eigenschaft kann aber im strengen Verstande nur einer biegsamen Linie zukommen: denn wofern der Körper irgend eine angebliche Dicke hat, müssen nothwendig bey seiner Biegung die an der konvexen Seite befindlichen Theile sich ausdehnen, welches ohne Anwendung von Kraft nicht geschehen kann. Ist der Körper überdies elastisch, so wird auch noch Kraft erfordert, ihn in dem gekrümmten Zustande, worin er bereits versetzt ist, ferner zu erhalten; oder, die Elasticität hält alsdann der biegenden Kraft das Gleichgewicht. Es ist im neunten Kapitel der Statik bey Bestimmung der respektiven Festigkeit elastischer Körper gezeigt worden, daß bey gleicher Dicke des Körpers das Moment dieser Kraft gegen irgend eine Stelle desselben sich verkehrt, wie der Halbmesser der Krümmung verhalte, die der Körper an dieser Stelle bekommen hat; heißt also r der Krümmungshalbmesser für ein Element bey Y der elastischen Kurve AYD, so läßt sich das Moment der Elasticität dieses Elementes allgemein durch $\frac{E}{r}$ ausdrücken, wo E eine beständige Größe bedeutet, die für jede besondere Materie und Form des Körpers durch Versuche gefunden werden muß.

§. 319.

Aufgabe. Auf jedes Element $= ds$ eines elastischen Körpers, der allenthalben gleiche Dicke hat, wirkt eine Kraft $= pds$, parallel mit AX, und eine andere, darauf senkrechte, oder nach XY, $= qds$; außerdem sind noch an seinem Endpunkte A zwey Kräfte F und G nach entgegengesetzten Richtungen Aa und Aα angebracht; man sucht die Kurve AYD, worin der Körper durch diese Kräfte, nachdem sie sich mit seiner Elasticität ins gleichgewicht gesetzt haben, gebogen seyn wird.

Fig. 46. Aufl. 1) Man nehme die Richtung AB der Elementarkräfte pds zur Abscissenlinie der Kurve AYD an, und setze als Koordinaten des Punktes Y, $AX = x$, $XY = y$. Für einen andern beliebigen Punkt y dieser Kurve sey $Ax = x'$, $xy = y'$, und von den beyden Kräften, die auf das daselbst befindliche Element ds wirken, sey die nach $yo = p'ds$, die nach $yr = q'ds$.

2) Die erstere strebt den Bogen yY um den Punkt Y nach innen zu drehen, oder den Körper an der Stelle Y ferner zu krümmen, und hat gegen diesen Punkt das Moment:

$$Yo \cdot p'ds = (y - y')\, p'ds.$$

3) Die Summe der Momente dieser einzelnen Kräfte $p'ds$ gegen Y ist daher $= \int (y - y')\, p'ds$, oder weil hierbey y als unveränderlich betrachtet werden muß, $= y\int p'ds - \int y'p'ds$.

4) Setzt man nun hierin $y' = y$, so wird auch $p' = p$, folglich das gesammte Moment aller nach AB gerichteten Kräfte, die auf den Bogen AY wirken, um ihn am Punkte Y zu drehen, $= y\int pds - \int ypds$.

5) Man nenne die Summe dieser Kräfte $\int pds = P$, so erhält man $pds = dP$. Hierdurch wird also das gefundene Moment $= yP - \int ydP = \int Pdy$; oder, wenn man darin den Werth für P wieder herstellt, $= \int dy \int pds$.

6) Die andere Kraft $q'ds$ hat dagegen das Bestreben, den Bogen yY um den Punkt Y auswärts zu drehen, und ihr Moment gegen denselben ist:

$$rY \cdot q'ds = xXq'ds = (x - x')\, q'ds$$

Hiervon die Summe genommen, und darin $x' = x$ gesetzt, giebt das sämmtliche Moment aller dieser Kräfte, so viel deren auf den Bogen AY wirken, ihn um den Punkt Y nach außen zu drehen, $= x\int qds - \int xqds$, welches sich auf gleiche Art, wie (5) gezeigt ist, in $\int dx \int qds$ verwandelt.

7 Letzteres Moment vom erstern (5), dem es entgegengesetzt ist, abgezogen, bleibt:

$$\int dy \int pds - \int dx \int qds$$

für das Moment der Kräfte beyder Art gegen den gemeinschaftlichen Punkt Y.

8) Hiermit vereinigen sich endlich noch die Momente Fy und Gx der Kräfte F und G gegen den Punkt Y, die aber gleichfalls einander entgegengesetzt sind, weil F und G den Bogen AY nach verschiedenen Seiten um Y zu drehen streben. Nach Abzug der erstern bleibt also von beyden noch $Gx - Fy$ übrig, und dies zum vorhin erhaltenen Momente addirt, giebt:

$$Gx - Fy + \int dy \int pds - \int dx \int qds.$$

9) Soll nun am Punkte Y keine fernere Biegung erfolgen, so muß die Elasticität des Elementes an dieser Stelle allen den Kräften, die auf den Bogen AY wirken, das Gleichgewicht halten, folglich ihr Moment $\frac{E}{r}$ (§. 318.) den Momenten dieser Kräfte zusammen genommen gleich seyn. Man bekommt daher die Gleichung:

$$Gx - Fy + \int dy \int pds - \int dx \int qds = E\left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}\right),$$

wodurch die Gestalt der Kurve verlangtermaßen bestimmt wird.

§. 320.

Bey der eben gefundenen Gleichung liegt, wie man sieht, die Voraussetzung zum Grunde, daß die elastische Ruthe in ihrem natürlichen Zustande gerade sey; indeß läßt sie sich doch auch leicht auf den allgemeinern Fall ausdehnen, wenn die Ruthe vor der Biegung jede willkührlich gekrümmte Form hat. Es entsteht nemlich dadurch weiter keine Aenderung als in dem Momente der Elasticität, das nun offenbar nicht mehr für irgend eine Stelle Y der ganzen Krümmung, die nach der Biegung daselbst erfolgt, proportional bleiben kann.

Fig. 47. Man setze den Krümmungshalbmesser für den Endpunkt Y des Bogens AY $= s$ bey der anfänglichen Gestalt der Ruthe $= R$, bey der nachmaligen, die sie durch die Biegung annimmt, $= r$; so ist die natürliche Länge des Streifen $p\pi p'\pi'$, der in der Höhe Yp $= u$ über Y liegt, und mit dem Elemente Yy $= ds$ einerley Amplitude YOy hat, $= ds\left(1 + \frac{u}{R}\right)$, und die Länge eben dieses Streifen im letztern Falle $= ds\left(1 + \frac{u}{r}\right)$; also seine Ausdehnung eds — $uds\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$.

Nennt man nun ferner den Querschnitt dieses Streifen $= ds$, so läßt sich seine zusammenziehende Kraft, die sowohl dem Koefficienten der Ausdehnung ε, als auch der Fläche dS proportional ist, durch $KudS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ ausdrücken. Ihr Moment gegen den Punkt Y ist sodann $= Ku^2dS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, und das Integral davon, oder das sämmtliche Moment der Elasticität der Stelle $Y = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) K\int u^2dS$.

Für den besondern Fall, wo die Ruthe Anfangs gerade ist, wird $\frac{1}{R} = 0$, also $K\int u^2dS = E$, und daher überhaupt das Moment der Elasticität $= E \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$. Dies für $\frac{E}{r}$ in die Gleichung (§. 319. 9.) gesetzt, giebt allgemein:

$$Gx - Fy + \int dy\int pds - \int dx\int qds = E \left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}\right) - \frac{E}{R},$$

wo R aus der anfänglichen Gestalt der Ruthe gegeben ist.

§. 321.

Für den bloß biegsamen Faden ist $E = 0$, mithin:

$$\int dy\int pds - \int dx\int qds = Fy - Gx.$$

Um auch zugleich seine Spannung T an irgend einer Stelle Y zu bestimmen, nenne man den Winkel, den die Tangente an Y mit der Ordinate XY macht, $= \varphi$; so geben die beyden Kräfte pds und qds, nach den Richtungen der Tangente und Normale zerlegt, zusammen eine Tangentialkraft nach der Axe AB zu $= -$ pds Sin φ — qds Cos φ, und eine Normalkraft nach außen zu $= -$ pds Cos φ + qds Sin φ. Daher wird (Statik §. 169.):

$$dT = - pds \operatorname{Sin} \varphi - qds \operatorname{Cos} \varphi$$

$$Td\varphi = - pds \operatorname{Cos} \varphi + qds \operatorname{Sin} \varphi.$$

Man multiplicire erstere Gleichung durch Sin φ, letztere durch Cos φ, und addire alsdann beyde, so erhält man:

$$dT \operatorname{Sin} \varphi + T \operatorname{Cos} \varphi d\varphi = - pds,$$

wovon das Integral T Sin φ = Const — $\int$pds ist.

Für den Anfangspunkt A sey nun T $=$ H, $\varphi = \alpha$; also, da das Integral $\int$pds für diesen Punkt verschwindet:

$$H \operatorname{Sin} \alpha = Const.$$

Die Spannung H wird bloß durch die Kräfte F und G hervorgebracht, und entspringt folglich aus der Zusammensetzung beyder. Daher hat man H Sin $\alpha = F$, H Cos $\alpha = G$, mithin Const $=$ F, und

$$T \operatorname{Sin} \varphi = F - \int pds.$$

Man multiplicire ferner die erstere obiger Gleichungen durch Cos φ, die letztere durch Sin φ, und subtrahire dann beyde von einander, so bleibt:

$$dT \operatorname{Cos} \varphi - T \operatorname{Sin} \varphi d\varphi = - qds,$$

woraus durch Integration:

$$T \operatorname{Cos} \varphi = G - \int qdt \text{ folgt.}$$

Beyde Werthe $T \sin\varphi$ und $T \cos\varphi$ mit einander verbunden, geben sodann:

$$T = F \sin\varphi + G \cos\varphi - \sin\varphi \int p ds - \cos\varphi \int q ds$$
$$= F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds} \int p ds - \frac{dy}{ds} \int q ds.$$

§. 322.

Wenn man noch die beyden zuletzt erhaltenen Integral-Gleichungen durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ multiplicirt, so erhält man aus der erstern

$$T \sin\varphi \cos\varphi = F \cos\varphi - \cos\varphi \int p ds,$$

und aus der letztern:

$$T \sin\varphi \cos\varphi = G \sin\varphi - \sin\varphi \int q ds, \text{ mithin}$$
$$F \cos\varphi - \cos\varphi \int p ds = G \sin\varphi - \sin\varphi \int q ds, \text{ oder}$$
$$F dy - G dx = dy \int p ds - dx \int q ds,$$

woraus durch Integrirung eben die Gleichung für die Gestalt des Fadens entsteht, die wir (§. 321.) aus der allgemeinern Formel abgeleitet haben. Es zeigt sich also hier zwischen beyden Methoden eine vollkommene Uebereinstimmung, von denen doch die letztere, da sie sich bloß auf die Theorie der Spannungen gründet, mit ersterer nichts gemein hat.

§. 323.

Fig. 48. **Aufgabe.** Wofern die im §. 319. angenommenen Kräfte mit der Elasticität des Körpers nicht ins Gleichgewicht treten können, so daß der Körper durch sie wirklich in Bewegung gesetzt wird, alsdann für jede verflossene Zeit t sowohl die Gestalt desselben AYD,

wie auch die Geschwindigkeit jedes seiner einzelnen Elemente anzugeben.

Aufl. 1) Es sey Y der Ort, wohin das am Endpuncte des Bogens $AY = s$ befindliche Elemente $Yy = ds$, dessen Masse m heißen mag, nach Verlauf der Zeit t gelangt ist; man setze als Coordinaten desselben, von einem bestimmten Puncte O der unbeweglichen Linie OB angerechnet, $OX = x$, $XY = y$; so sind x und y veränderliche Größen, die theils vom Bogen s, theils von der Zeit t abhängen. Von s nemlich, insofern für einen bestimmten Zeitpunct jedem einzelnen Elemente zwey besondere Coordinaten zugehören; und von t deshalb, weil der Endpunct eines bestimmten Bogens in jedem folgenden Zeittheile an einem andern Orte sich befindet.

2) Da also für einerley Bogenlänge s das Wachsthum der Größen x und y bloß vom Wachsthum der Zeit herrührt, so sind die Geschwindigkeiten des gedachten Elementes nach den beyden Richtungen Yo und Yr die partiellen Differenzialquotienten von x und y nach t genommen, oder $= \left(\frac{dx}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Wir wollen sie v und u nennen.

3) Ihre Aenderungen dv und du im nächsten Zeittheile dt setzen voraus, daß das Element m nach obigen Richtungen durch zwey Kräfte $= \frac{m}{2g}\left(\frac{dv}{dt}\right)$ und $\frac{m}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right)$ beschleunigt werde. Es sey die Masse des

ganzen Körpers $= K$, seine Länge $AD = a$, so ist, wegen der gleichen Dicke desselben, $m = \frac{Kds}{a}$, und folglich:

$$\frac{m}{2g}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right);\ \frac{m}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

4) Wofern also diese beyden Kräfte auf jedes einzelne Element nach den Richtungen Yo und Yr wirkten, würde die Bewegung des ganzen Körpers eben so erfolgen, wie sie durch die in der Aufgabe gegebenen Kräfte wirklich hervorgebracht wird. Also müssen solche den gegebenen Kräften in einerley Zeitpunkte der Bewegung äquipollent seyn, und folglich nach umgekehrter Richtung ihnen das Gleichgewicht halten.

5) Es muß daher der ganze Körper im Gleichgewichte seyn, wenn an seinem Endpunkte A nach den Richtungen Aa und Aα die Kräfte F und G ziehen, und außerdem jedes seiner Elemente den beyden Kräften

$pds - \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ nach Yo, und $qds - \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ nach Yr ausgesetzt ist.

6) Setzt man demnach $p - \frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = p'$ $q - \frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = q'$, und überdies den Krümmungshalbmesser für den Endpunkt des Bogens AY bey der anfänglichen Gestalt des Körpers $= R$, so bekommt man folgende Gleichung:

$$Gx - Fy + \int dy \int p' ds - \int dx \int q' ds = E \left(\frac{dy d^2x - dx d^2y}{ds^3}\right) - \frac{E}{R};$$

woraus sich alles herleiten läßt, was von der Bewegung des Körpers zu wissen verlangt wird.

Von der Schwingung der Saiten.

§. 324.

Fig. 49. Eine gleichdicke Saite AB, die an ihren Endpunkten A und B befestigt, und mit einer Kraft $= \Pi$ gespannt ist, werde auf irgend eine Art, entweder durch Anschlagen, oder indem man sie erst zur Seite biegt, und dann wieder losläßt, in Bewegung gebracht.

Es ist willkührlich, wovon man die Zeit der Bewegung anrechnet; indeß wollen wir hier, der Bestimmtheit wegen, dazu den Augenblick wählen, wenn die ganze Saite ihre natürliche geradlinigte Gestalt AxB wieder bekommen hat. Da hier nur von sehr kleinen Schwingungen die Rede ist, so kann man füglich annehmen, daß die Ausweichungen jedes einzelnen Punktes der Saite von seinem anfänglichen Orte x in der auf AxB senkrechten Linie xy geschehen, oder daß seine Geschwindigkeit $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ längs der Axe AB, $= 0$ sey. Aus eben dem Grunde ist es auch gestattet, die Ausdehnung der Saite während der Bewegung außer Acht zu lassen; also die Länge des Bogens $Ay = s$, der Abscisse $Ax = x$ gleich zu setzen.

Es sey demnach y der Ort, wohin der Punkt x nach Verlauf der Zeit t gelangt ist; der durchlaufene Raum xy, als Ordinate, die zur Abscisse $Ax = x$ gehört, $= y$. Ferner sey die ganze Länge der Saite AB $= a$, und ihre Masse, oder Gewicht $= K$.

Was endlich die Kräfte betrifft, denen die Saite während ihrer Bewegung ausgesetzt ist, so rühren diese bloß von ihrer Befestigung her, und sind

1) die Spannkraft $= \Pi$, wodurch sie bey A und B nach den entgegen gesetzten Richtungen Aa und Bb gezogen wird, und

2) eine darauf senkrechte Kraft; womit der feste Punkt A seitwärts, nach der Richtung Aa, sie zurückhält. Sie ist nicht, wie die Spannung Π, unveränderlich, sondern richtet sich nach der langsamern oder schnellern Bewegung der Saite, und hängt deshalb von der Zeit t ab. Wir wollen sie, wie oben geschehen ist, $= G$ setzen.

Nach diesen vorläufigen Erinnerungen hat man nun gegenwärtig: $E = o$, $F = \Pi$, $p = o$, $q = o$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = o$, und $x = s$, also

$$p' = o,\ q' = -\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right);\ \text{daher wird:}$$

$$Gs - \Pi y + \frac{K}{2ag}\int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = o.$$

§. 325.

Wenn man diese Gleichung zweymal nach s differenziirt, so bekommt man, weil G von s unabhängig, also hierbey unveränderlich ist:

$$\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \Pi\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o,$$

oder, $\frac{2ag\Pi}{K} = c^2$ gesetzt:

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Um hiervon das vollständige Integral zu erhalten, betrachte man y als eine Funktion φu von einer neuen veränderlichen Größe u, die von t und s auf irgend eine Art abhängen mag, und setze der Kürze wegen $\frac{d\,.\,\varphi u}{du} = \varphi' u$, $\frac{d\varphi' u}{du} = \varphi'' u$; so wird:

$$dy = \varphi' u\ .\ du = \varphi' u\left[\left(\frac{du}{ds}\right)ds + \left(\frac{du}{dt}\right)dt\right],$$

folglich:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = \left(\frac{du}{ds}\right)\varphi' u, \text{ und } \left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right)\varphi' u;$$

also ferner:

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)\varphi' u + \left(\frac{du}{ds}\right)^2\varphi'' u, \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\varphi' u + \left(\frac{du}{dt}\right)^2\varphi'' u, \text{ mithin:}$$

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - c^2\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)\right]\varphi' u + \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - c^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2\right]\varphi'' u = o.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn man

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - c^2\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) = o, \text{ und}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - c^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = o \text{ setzt.}$$

Aus Letzterm folgt: $c\left(\frac{du}{ds}\right) = \mp\left(\frac{du}{dt}\right)$; dem auf die einfachste Art Genüge geleistet wird, wenn man $\left(\frac{du}{dt}\right) = c$, und $\left(\frac{du}{ds}\right) = \mp 1$ annimmt. Hieraus entspringt durch Integrirung:

$$u = ct + M, \text{ und } u = N \mp s$$

wo M eine Funktion von s, und N eine Funktion von t seyn kann.

Läßt man nun erstere für $s = o$, und letztere für $t = o$ verschwinden, so erhält man $N = ct$, und $M = \mp s$, wodurch dann $u = ct \mp s$, und folglich allgemein:

$$y = \varphi(ct + s) + \psi(ct - s) \text{ wird.}$$

§. 326.

Da für den Anfangspunkt A, oder für $s = o$, auch $y = o$ seyn muß, so bekommt man

$$o = \varphi \,.\, ct + \psi \,.\, ct, \text{ oder } \psi \,.\, ct = - \varphi \,.\, ct;$$

also stehen diese beyden Funktionen in einer solchen Beziehung gegen einander, daß ihre Werthe, für einerley Werth der veränderlichen Größe, allemal einander gleich und entgegengesetzt sind; daher ist auch überhaupt:

ψ (ct

$$\psi(ct - s) = -\varphi(ct - s), \text{ mithin}$$
$$y = \varphi(ct + s) - \varphi(ct - s).$$

Ferner muß auch für das andere Ende B, oder für $s = a$, $y = 0$ seyn; also hat man zur zweyten Bedingung:

$$0 = \varphi(ct + a) - \varphi(ct - a),$$
$$\text{oder: } \varphi(ct + a) = \varphi(ct - a).$$

Um die Forderung, die in dieser Gleichung enthalten ist, noch einfacher darzustellen, setze man $ct - a = z$, so wird $ct + a = z + 2a$, folglich $\varphi(z + 2a) = \varphi z$. Es muß also die Funktion φz von solcher Beschaffenheit seyn, daß sie wieder eben den Werth bekommt, nachdem die veränderliche Größe z in ihr um $2a$ gewachsen ist.

§. 327.

Nach Verlauf einer Zeit $t' = t + \frac{2a}{c}$ ist demnach jeder einzelne Punkt y der Saite wieder an eben den Ort, wo er sich zur Zeit t befand, zurückgekehrt; daher hat man für die Dauer einer ganzen Schwingung derselben: $t' - t = \frac{2a}{c}$. Wenn nemlich xy die größte Ausweichung des Punktes x aus seiner natürlichen Lage x bedeutet, so verfließt die Zeit $\frac{2a}{c}$, bevor derselbe aus y durch x zur andern Seite der Abscissenlinie AxB übergegangen, und von dort wieder denselben Weg bis y rückwärts durchlaufen ist.

§. 328.

1. Da $c^2 = 2ag \cdot \frac{\Pi}{K}$ ist (§. 325.), so wird, wenn wir die ganze Dauer einer Schwingung T nennen:

$$T = \sqrt{\frac{2aK}{g\Pi}}.$$

Also verhält sich die Schwingungszeit einer Saite direkt, wie die Quadratwurzel aus ihrer Länge und ihrem Gewichte, und verkehrt, wie die Quadratwurzel aus der Spannung derselben.

2. Es sey n die Anzahl der Schwingungen, die sie binnen einer Sekunde verrichtet, so hat man $T : 1'' = 1 : n$, folglich:

$$n = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g\Pi}{2aK}}.$$

3) Setzt man das Gewicht der Saite für die Länge $= 1, = \varkappa$, so wird ihr ganzes Gewicht $K = aK$, mithin:

$$n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{g\Pi}{2K}};$$

daher verhält sich bey unveränderter Spannung einer und derselben Saite die Anzahl ihrer Schwingungen in einer Sekunde verkehrt, wie ihre Länge; worauf sich die bekannte Einrichtung des Monochordes gründet.

Von der Schwingung elastischer Ruthen und Klingen.

§. 329.

Für sehr geringe Schwingungen einer elastischen

Ruthe AB, die im natürlichen Zustande geradlinigt ist, gelten wieder dieselben Voraussetzungen, daß $s = x$, und $\left(\frac{dx}{dt}\right) = o$ sey. Da nun außerdem $p = o$, $q = o$, und wegen der anfänglichen geraden Gestalt der Ruthe, auch $R = o$ ist, so verwandelt sich in gegenwärtigen Falle die allgemeine Gleichung (§. 323.) in folgende:

$$Gs - Fy + \frac{K}{2ag} \int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = - E \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

woraus durch zweymaliges Differenziiren nach s die Gleichung

$$\frac{K}{2ag} \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = F \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) - E \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) \text{ entspringt.}$$

§. 330.

Fig. 50. **Aufgabe.** Es sey das eine Ende A der elastischen Ruthe in eine Wand eingeschlossen, und das andere Ende B frey. Man fragt, wie groß unter diesen Umständen die Dauer ihrer Schwingungen seyn werde.

Aufl. 1) Nach Verlauf der Zeit t sey der Punkt x bis y fortgerückt, so daß alsdann die ganze Ruthe die gekrümmte Form AyD angenommen hat. Man nehme in B den Anfangspunkt der Abscissen, und setze $Bx = x$, $xy = y$.

2) Da auf den Punkt B keine Kräfte wirken, so hat man hier $F = o$, $G = o$, folglich:

$$\frac{K}{2ag} \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = - E \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

oder, wenn man $\frac{2agE}{K} = c^4$ setzt:

$$c^4 \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = -\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

3) Wegen der Differenzialgröße vom vierten Grade linker Hand müßte das vollständige Integral dieser Gleichung eigentlich vier unbestimmte Funktionen von s und t in sich fassen: man hat aber bis jetzt noch kein Mittel entdeckt, dasselbe in dieser allgemeinen Form darstellen zu können. Indeß beruhet auch gerade nicht sehr viel darauf, jede mögliche Gestalt der Kurve anzugeben, und es ist zu unserm Zwecke schon hinreichend, wenn ein besonderes Integral der Gleichung Genüge thut, das zugleich auf gleichzeitige Schwingungen hinführt. Zu dem Ende setze man nach der Analogie der unendlich kleinen Pendelschwingungen:

$$y = M \operatorname{Sin} \varepsilon t,$$

wo M einen Faktor bedeutet, der in Beziehung auf t unveränderlich ist, und daher nur allein von s abhängen kann.

4) Man erhält hieraus

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\varepsilon^2 M \operatorname{Sin} \varepsilon t,$$

und $\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = \frac{d^4M}{ds^4} . \operatorname{Sin} \varepsilon t$, folglich (2)

$$c^4 . \frac{d^4M}{ds^4} = \varepsilon^2 M,$$

oder, wenn man $\varepsilon = \frac{c^2}{f^2}$ setzt,

$$f^4 \cdot \frac{d^4M}{ds^4} = M.$$

5) Dieser Gleichung entsprechen folgende vier besondere Werthe von M:

$$e^{\frac{s}{f}},\ e^{-\frac{s}{f}},\ \mathrm{Sin}\,\frac{s}{f},\ \mathrm{Cos}\,\frac{s}{f}.$$

Daher läßt sich allgemein:

$$M = \alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{-\frac{s}{f}} + \gamma\,\mathrm{Sin}\,\frac{s}{f} + \delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{s}{f} \text{ annehmen;}$$

und es wird folglich:

$$y = \mathrm{Sin}\,\frac{c^2t}{f^2}\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{-\frac{s}{f}} + \gamma\,\mathrm{Sin}\,\frac{s}{f} + \delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{s}{f}\right).$$

6) Aus §. 329. bekommt man für die Summe der Momente aller auf den Bogen By wirkenden Kräfte in Bezug auf den Punkt y:

$$\frac{K}{2ag}\int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

und für die bloße Summe dieser Kräfte:

$$\frac{K}{2ag}\int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right).$$

Da nun beyde Summen für den Anfangspunkt B verschwinden, so folgt, daß für $s = o$, sowohl $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)$, als auch $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) = o$ seyn müsse. Diese Bedingungen geben:

$$\alpha + \beta - \delta = 0, \text{ und } \alpha - \beta - \gamma = 0, \text{ oder}$$
$$\alpha + \beta = \delta, \text{ und } \gamma = \alpha - \beta.$$

7) Ferner ist am andern befestigten Ende A, oder für $s = a$, $y = 0$, und weil daselbst die Kurve mit der Axe BA zusammenfällt, auch $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; folglich, wenn wir der Kürze wegen $\frac{a}{f} = \omega$ setzen:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = 0, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Cos} \omega - \delta \operatorname{Sin} \omega = 0.$$

8) Beyde Gleichungen addirt und subtrahirt, geben:

$$2\alpha e^{\omega} + \gamma (\operatorname{Sin}\omega + \operatorname{Cos}\omega) + \delta (\operatorname{Cos}\omega - \operatorname{Sin}\omega) = 0, \text{ und}$$
$$2\beta e^{-\omega} + \gamma (\operatorname{Sin}\omega - \operatorname{Cos}\omega) + \delta (\operatorname{Sin}\omega + \operatorname{Cos}\omega) = 0,$$

und wenn man darin für γ und δ ihre Werthe aus (6) substituirt, erhält man:

$$\alpha (\operatorname{Cos} \omega + e^{\omega}) - \beta \operatorname{Sin} \omega = 0$$
$$\beta (\operatorname{Cos} \omega + e^{-\omega}) + \alpha \operatorname{Sin} \omega = 0,$$

also $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{Cos} \omega + e^{\omega}}{\operatorname{Sin} \omega} = \frac{-\operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Cos} \omega + e^{-\omega}}$,

mithin $-\operatorname{Cos} \omega \, (e^{\omega} + e^{-\omega}) = 2$,

woraus der Werth von ω leicht gefunden werden kann.

9) Es sey nun nach Verlauf einer Zeit t', vom Anfange der Bewegung angerechnet, die Gestalt der Kurve AyD wieder genau dieselbe, als zur Zeit t, folglich die Ordinate y, die zu einerley Bogen $By = s$ ge-

hört, für die beyden Zeiten t und t' von einerley Größe; so wird erfordert, daß $\mathrm{Sin}\,(\frac{c^2 t}{f^2}) = \mathrm{Sin}\,(\frac{c^2 t}{f^2})$ sey. Daher hat man: $\frac{c^2 t'}{f^2} = \frac{c^2 t}{f^2} + 2\pi$, oder $t' = t + \frac{2\pi f^2}{c^2}$; mithin für die Zeit einer ganzen Schwingung, oder eines Hin- und Herganges

$$t' - t = \frac{2\pi f^2}{c^2} = \frac{2\pi a^2}{\omega^2 c^2} = \frac{2\pi a^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{K}{2agE}}.$$

§. 331.

Aus der Gleichung (8) erhellet, daß $\mathrm{Cos}\,\omega$ negativ seyn müsse; daher kann entweder

$\omega > \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi$ u. s. w., oder

$< \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ \frac{11}{2}\pi$ seyn.

Man setze zuvörderst $\omega = \frac{1}{2}\pi + \lambda$, so erhält man:

$$\mathrm{Sin}\,\lambda\,(e^{\frac{1}{2}\pi} . e^{\lambda} + e^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-\lambda}) = 2.$$

Nun ist bekanntlich $\mathrm{Sin}\,\lambda = \lambda - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{120}\lambda^5 - ..$

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^4 ..$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^4 ..$$

Ferner $e^{\frac{1}{2}\pi} = 4{,}81048$, $e^{-\frac{1}{2}\pi} = 0{,}20788$, wodurch die Gleichung in folgende Reihe aufgelößt wird:

$$2 = 5{,}01836\,\lambda + 4{,}60260\,\lambda^2 + 1{,}67279\,\lambda^3 - 0{,}16728\,\lambda^5.$$

Die ersten beyden Glieder dieser Reihe geben sehr nahe $\lambda = 0{,}3$, und wenn man $\lambda = 0{,}3 + q$ setzt, bekommt man mit Zuziehung der übrigen:

$$0{,}035498 - 8{,}22616\,q = 0, \text{ also}$$

$$q = 0{,}00431.$$

Daher ist genauer: $\lambda = 0{,}30431$, und

$\omega = \frac{1}{2}\pi + \lambda = 1{,}87511$, oder beynahe $= \frac{3}{5}\pi$. Eben so findet man, wenn man $\omega = \frac{3}{2}\pi - \lambda$ setzt, $\lambda = 0{,}01829$, folglich $\omega = 4{,}69408$, welches von $\frac{3}{2}\pi$ nur wenig verschieden ist. Noch unbedeutender sind die Abweichungen der höhern Werthe des Winkels ω von $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$ u. s. f., so daß man sie ohne Bedenken weglassen kann. Daher hat man für ω folgende Reihe von Werthen:

$$\tfrac{3}{5}\pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi,\ \tfrac{9}{2}\pi \text{ u. s. f.}$$

und folglich eben so viel verschiedene Schwingungszeiten, die insgesammt zu gleicher Zeit statt haben.

§. 332.

Aus der gefundenen Zeit einer halben Schwingung der Ruthe $= \frac{\pi a^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{K}{2agE}}$ ergiebt sich die Anzahl der halben Schwingungen, die sie in einer Sekunde verrichtet: $n = \frac{\omega^2}{\pi a^2}\sqrt{\frac{2agE}{K}}$.

Wofern diese Anzahl so groß ist, oder die Schwingungen mit einer solchen Schnelligkeit geschehen, daß dadurch höhere Töne hervorgebracht werden, so giebt es deren allemal eine unendliche Menge, und ihre Höhen wachsen in folgenden Verhältnissen:

$$\frac{36}{25},\ 9,\ 25,\ 49,\ 81 \text{ u. s. w.}$$

Wegen ihres beträchtlichen Abstandes wird man zwar nicht leicht mehr, als einen oder höchstens zwey von diesen Tönen zu gleicher Zeit wahrnehmen können; daß aber demungeachtet die übrigen nicht minder wirklich vorhanden sind, davon überzeugt man sich hinlänglich durch nachstehende Versuche, die **Lambert** mit einem Messingdrathe angestellt hat:

1. So lange das freye schwingende Ende desselben unter 1 Zoll Länge hatte, war nur ein einziger deutlicher Ton bemerkbar.

2. Für 15 Lin. Länge bekam jener Ton mehr Tiefe, und ein zweyter wurde außer ihm vernehmlich, der sich davon um zwey volle Oktaven und darüber noch um etwas mehr als eine Quinte unterschied.

3. Bey zunehmender Länge ging der erstere allmählig, wegen zu großer Tiefe, verloren, und der zweyte wurde jetzt Hauptton. Für eine Länge von ungefähr 30 Lin. kam schon ein dritter Ton zum Mitlaute.

4. Bey fortgesetzter Verlängerung wurde auch der zweyte nach und nach undeutlich, und verlor sich am Ende ganz. Der dritte nahm an Höhe immer mehr und mehr ab, und bey 50 Lin. Länge hatte sich bereits ein vierter Ton eingemischt.

Man sieht hieraus, wie mit wachsender Länge des Drathes von den vorangehenden Tönen einer nach dem andern verschwindet, und statt dessen einer der folgenden hörbar wird; etwa so, wie eine Reihe von Gegenständen, die das Auge nicht mit einem Blicke überschauen kann, bey allmähliger Veränderung des Gesichtsfeldes sich nach und nach theilweise demselben darstellt.

Um auch in Ansehung der Folge der Töne die Richtigkeit der Theorie, so viel es sich aus dem Beygebrachten thun läßt, zu prüfen, setze man beym zweyten Versuche den ersten Ton $= 1$, den zweyten $= p$, so ist zu Folge der Angabe p etwas gröser als $2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 6$. Nach dem oben gefundenen Verhältnisse erhält man dagegen:

$$\frac{36}{25} : 9 = 1 : p; \text{ also } p = 6\tfrac{1}{4},$$

welches mit dem Versuche sehr gut übereinstimmt.

§. 333.

Zur Bestimmung der absoluten Anzahl der Schwingungen, die die elastische Ruthe oder Klinge in einer Sekunde vollendet, ist noch erforderlich, ihr Moment der Elasticität E zu wissen. Man hänge in dieser Absicht an den Endpunkt B derselben irgend ein Gewicht P, und bemerke, um wieviel dadurch dieser Punkt tiefer, als durch das bloße Gewicht K der Ruthe herabgebogen wird. Wir wollen diesen Raum $= h$ nennen.

Nach §. 319. 9. hat man nun gegenwärtig $p = 0$, $q = \frac{K}{a}$, $F = 0$, $G = - P$, und unter der Voraussetzung, daß die Biegung gering sey, $s = x$, mithin:

$$Ps + \frac{Ks^2}{2a} = E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Hiervon ist das Integral:

$$B + \tfrac{1}{2}Ps^2 + \frac{Ks^3}{6a} = E\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

und wenn man nochmals integrirt, erhält man:

$$A + Bs + \tfrac{1}{6}Ps^3 + \frac{Ks^4}{24a} = Ey.$$

Da am andern Endpunkte A, oder für $s = a$, sowohl $y = o$, als auch $\frac{dy}{ds} = o$ ist, so wird:

$$A + Ba + (\tfrac{1}{6}P + \tfrac{1}{24}K)\, a^3 = o, \text{ und}$$
$$Ba + (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{6}K)\, a^3 = o,$$
$$\text{mithin } A = (\tfrac{1}{3}P + \tfrac{1}{8}K)\, a^3$$

Heißt ferner f der ganze Raum BD, durch den der Punkt B herabsinkt, so ist für $s = o$, $y = f$, also:

$$Ef = A = (\tfrac{1}{3}P + \tfrac{1}{8}K)\, a^3$$

Endlich sey noch e die Tiefe, wozu der Punkt B herabgezogen wird, wenn die Ruthe bloß ihrem eigenen Gewichte ausgesetzt ist, so hat man für $P = o$, $f = e$; also $Ee = \frac{1}{8}Ka^3$, und weil $h = f - e$ ist, $Eh = \frac{1}{3}Pa^3$, folglich $E = \frac{Pa^3}{3h}$.

Dieser Werth für E in obiger Formel (§. 332.) substituirt, giebt:

$$n = \frac{\omega^2}{\pi}\sqrt{\frac{2gP}{3hK}}.$$

Versuch. *) Ein Messingdrath, der 143 Rheinl. Linien lang war, und 11,4 Gran wog, wurde am freyen Ende B mit 5 Gran behängt, und dadurch um 24 Linien tiefer, als von seinem eigenen Gewichte, niedergebogen. Nachdem das Gewicht abgenommen war, machte er innerhalb 30 Sekunden Zeit 142 Schwingungen.

*) a. a. O. pag. 48.

Da hier von den Schwingungen der langsamsten Art die Rede ist, so hat man $\omega = \frac{3}{5}\pi$, also $\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{9}{25}\pi$; ferner ist $g = 15\frac{5}{8} \cdot 144''' = 2250'''$, $h = 24'''$, $K = 11{,}4$, $P = 5$, folglich:

$$\log \sqrt{\frac{2gP}{3hK}} = 0{,}7189226$$

$$\text{dazu } \log \frac{\omega^2}{\pi} = 0{,}0534524$$

$$\text{giebt } \log n = 0{,}7723750.$$

$$n = 5{,}92.$$

Der Beobachtung zufolge ist $n = 4{,}73$. Aus andern Versuchen hingegen, die **Lambert** mit kürzeren Stücken desselben Drathes machte, fand er durch Hülfe der beobachteten Töne nach angestellter Reduktion $n = 5{,}43$ *); welches dem berechneten Werthe, und gewiß auch der Wahrheit, näher kommt, weil beym bloßen Abzählen der Schwingungen sehr leicht ein merklicher Irrthum vorgehen kann.

§. 334.

Wenn die elastische Ruthe am Endpunkte A bloß mit einer Zange gefaßt ist, so daß sie sich um diesen Punkt frey drehen kann, so bleibt das nächste Element bey A während der Bewegung nicht stets in seiner anfänglichen Lage; es behält aber dagegen seine geradlinigte Form, weil offenbar durch das Drehen der Ruthe die Biegung am Unterstützungspunkte vermieden wird.

*) pag. 72.

Man hat also in diesem Falle für $s = a$, $y = o$, und $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o$; oder, wenn wieder $\frac{a}{f} = \omega$ gesetzt wird:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = o, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \operatorname{Sin} \omega - \delta \operatorname{Cos} \omega = o.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} = o, \text{ und}$$
$$\gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = o,$$

und wenn man noch in letzterer Gleichung für γ und δ ihre Werthe aus §. 330. 6. substituirt, verwandelt sie sich in:

$$\alpha (\operatorname{Cos} \omega + \operatorname{Sin} \omega) + \beta (\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega) = o;$$

daher wird $\frac{-\beta}{a} = e^{2\omega} = \frac{\operatorname{Cos} \omega + \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega} = \frac{1 + \operatorname{tang} \omega}{1 - \operatorname{tang} \omega} =$ $\operatorname{tang} (45^{\circ} + \omega)$.

Man setze $\operatorname{tang} (\frac{1}{4}\pi + \omega) = \operatorname{Cot} \varphi$, so erhält man:

$$\tfrac{1}{4}\pi + \omega = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi,\ \tfrac{3}{2}\pi - \varphi,\ \tfrac{5}{2}\pi - \varphi \text{ u. s. w.}$$

folglich: $\omega = \frac{1}{4}\pi - \varphi,\ \frac{5}{4}\pi - \varphi,\ \frac{9}{4}\pi - \varphi$ u. s. f.

worin $\operatorname{Cot} \varphi = e^{2\omega}$, also φ desto kleiner ist, je größer ω genommen wird.

Was den ersten Werth von ω, nemlich $\frac{1}{4}\pi - \varphi$ betrifft, so ist für diesen offenbar $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; denn dadurch wird $\omega = o$, und folglich der Gleichung Genüge geleistet.

Beym zweyten bekommt man $\operatorname{tang} \varphi = e^{-2\omega} = \frac{e^{2\varphi}}{e^{\frac{5}{2}\pi}}$, und weil hier wegen des beträchtlichen Nenners schon vorauszusehen ist, daß Φ sehr gering seyn müsse, kann man $e^{2\varphi} = 1$ setzen, wodurch $\tang \varphi = \varphi = e^{-\frac{5}{2}\pi} = 0{,}000388$ wird. Es ist also sehr nahe $\omega = \frac{5}{4}\pi$. Noch weit geringer ist der Bogen Φ bey den folgenden Werthen von ω, die daher von den Gliedern der Reihe $\frac{9}{4}\pi$, $\frac{13}{4}\pi$ u. s. f. um nichts verschieden sind, was irgend in Betracht gezogen zu werden verdiente.

Demnach sind die Töne, die unter gegenwärtigen Umständen durch die elastische Ruthe hervorgebracht werden, höher, als in dem vorhin betrachteten Falle, und stehen unter einander in folgenden Verhältnissen:

25, 81, 169, 289 u. s. w.

§. 335.

Aufgabe. Die Dauer der Schwingungen der elastischen Ruthe zu bestimmen, wenn sowohl ihr eines Ende A, wie auch das andere B in einer Seitenwand befestigt ist; jedoch unter der Voraussetzung, daß sie dadurch weder gebogen noch gespannt wird.

Aufl 1) Da hier $F = 0$ ist, so bekommt man eben die Fundamentalgleichung, wie im §. 330; daher bleibt auch der allgemeine Ausdruck für y (5) derselbe, nur daß darin die Größe f, nebst den Koefficienten α, β, γ, δ, auf andere Art bestimmt werden müssen.

2) Zuvörderst ist für $s = 0$, sowohl y als $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, mithin: $\alpha + \beta + \delta = 0$, und $\alpha - \beta + \gamma = 0$, oder $\gamma = \beta - \alpha$ und $\delta = -(\alpha + \beta)$.

3) Dann

3) Dann ist auch für den andern Endpunkt, oder für $s = a$, y und $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; also, wenn wieder $\frac{a}{f} = \omega$ heißt:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = 0, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Cos} \omega - \delta \operatorname{Sin} \omega = 0.$$

4) Wenn man diese Gleichungen theils addirt, theils subtrahirt, so erhält man:

$$2\alpha e^{\omega} + \gamma(\operatorname{Sin} \omega + \operatorname{Cos} \omega) + \delta(\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega) = 0,$$
$$2\beta e^{-\omega} + \gamma(\operatorname{Sin} \omega - \operatorname{Cos} \omega) + \delta(\operatorname{Sin} \omega + \operatorname{Cos} \omega) = 0,$$

und darin für γ und δ ihre Werthe substituirt, giebt:

$$\alpha(e^{\omega} - \operatorname{Cos} \omega) + \beta \operatorname{Sin} \omega = 0$$
$$\beta(e^{-\omega} - \operatorname{Cos} \omega) - \alpha \operatorname{Sin} \omega = 0;$$

woraus $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{Sin} \omega}{e^{-\omega} - \operatorname{Cos} \omega} = \frac{\operatorname{Cos} \omega - e^{\omega}}{\operatorname{Sin} \omega}$, oder

$$2 = \operatorname{Cos} \omega\,(e^{\omega} + e^{-\omega}) \text{ folgt.}$$

5) Da hiernach $\operatorname{Cos} \omega$ nothwendig positiv seyn muß, so führt dies auf folgende Reihe von Werthen, die der Bogen ω zu gleicher Zeit annimmt:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi,\ \tfrac{3}{2}\pi + \varphi',\ \tfrac{5}{2}\pi - \varphi'' \text{ u. s. f.}$$

6) Der erste Werth für ω, der sogleich in die Augen fällt, ist $\omega = 0$. Außer ihm giebt es unter $\frac{1}{2}\pi$ keinen andern mehr: denn das Differenzial von obigem Ausdrucke, $\operatorname{Cos} \omega\,(e^{\omega} - e^{-\omega}) - \operatorname{Sin} \omega\,(e^{\omega} + e^{-\omega})$ ist sowohl für ächt gebrochene ω, als auch für solche, die zwischen 1 und $\frac{1}{2}\pi$ fallen, negativ, und zeigt also,

daß der Ausdruck von 2 bis zu o beständig abnehme, indem ω von o bis zu $\frac{1}{2}\pi$ anwächst.

7) Durch den zweyten Werth $\frac{3}{2}\pi + \varphi'$ verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$2 = \text{Sin}\,\varphi' \left(e^{\frac{3}{2}\omega}\, e^{\varphi'} + e^{-\frac{3}{2}\pi}\, e^{-\varphi'} \right)$$

und wenn man den Ausdruck rechter Hand in die Reihe auflößt, erhält man:

$$2 = 111{,}32669\,\varphi' + 111{,}30871\,\varphi'^2 \ldots$$

woraus $\varphi' = 0{,}01765$, und $\omega = 4{,}73002$ wird.

8) In den folgenden Werthen von ω sind die Größen φ'', φ''' u. s. f. höchst unbedeutend, und können daher füglich weggelassen werden, so daß also ω mit den Gliedern der Reihe $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi$ sehr genau zusammenfällt.

§. 336.

Wenn die beyden Enden der elastischen Ruthe A und B bloß gefaßt sind, so hat man sowohl für $s = o$, als $s = a$, y und $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o$.

Daher wird $\alpha + \beta + \delta + o$, und $\alpha + \beta - \delta = o$, also $\delta = o$. Ferner

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma\,\text{Sin}\,\omega + \delta\,\text{Cos}\,\omega = o, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma\,\text{Sin}\,\omega - \delta\,\text{Cos}\,\omega = o.$$

Beyde Gleichungen von einander subtrahirt, giebt $\gamma\,\text{Sin}\,\omega + \delta\,\text{Cos}\,\omega = o$, folglich, weil $\delta = o$ ist, $\gamma\,\text{Sin}\,\omega = o$, mithin $\text{Sin}\,\omega = o$; wodurch ω folgende Reihe von Werthen bekommt:

$$o,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi \text{ u. s. f.}$$

Es hat also dieser Fall vor den übrigen das Auszeichnende, daß die verschiedenen zu gleicher Zeit erfolgenden Töne unter sich in einem besonders einfachen Verhältnisse stehen.

Etwas über Uhrfedern.

§. 337.

Ueber die zurückweichende Kraft aufgewundener Spiralfedern hat uns **Berthoud** in seinem Traité des horloges marines eine Menge sehr schöner Versuche mitgetheilt, die er durch Hülfe einer besondern von ihm erfundenen Elasticitätswage (balance elastique) angestellt hat. Ich will von der Einrichtung dieses Instruments nur so viel hier angeben, als zum richtigen Verständnisse der gedachten Versuche nöthig seyn wird.

Fig. 51. 1. Die vertikale Scheibe pmq hat im Mittelpunkte eine Oeffnung, wodurch eine horizontale Axe C geht. Sowohl die Axe ist für sich, wie auch die Scheibe um sie, besonders beweglich.

2. Die Feder, womit der Versuch gemacht werden soll, wird mit dem einen Ende am Anfange der Axe, und mit dem andern auf der Scheibe irgendwo in f befestigt.

3. Wenn man nun leztere um einen beliebigen Winkel $oCn = \varphi$ nach der Seite pmq umdreht, und sie sodann in ihrer jetzigen Lage auf einer dahinter liegenden Fläche festschraubt, so wird die Feder um eben

so viel aufgewunden, und bekommt dadurch eine ausdehnende Kraft, womit sie die Axe nach eben der Richtung zu drehen strebt. Wir wollen diese Kraft $= W$ nennen.

4. Um sie zu messen, wird an einen Punkt a des Armes Co, der an der Axe festsitzt, so viel Gewicht gehängt, daß derselbe sich wieder horizontal stellt, oder nach wie vor auf den fixen Punkt o hinweißt.

5. Es sey dies Gewicht $= P$, die Länge des Armes $Ca = f$, der Halbmesser der Axe $= e$, so hat man:

$$We = Pf, \text{ und folglich } W = \frac{Pf}{e},$$

so daß also für jeden Umdrehungswinkel φ die Kraft der Feder aus dem angehängten Gewichte, dem sie das Gleichgewicht hält, gefunden werden kann.

§. 338.

Eine Feder, die 15 Zoll lang, $1\frac{7}{12}$ Linien breit, $\frac{5}{48}$ Lin. dick war, 48 Gran wog, $8\frac{3}{4}$ Lin. im Durchmesser hatte, und im natürlichen Zustande 8 Windungen machte, gab vermittelst dieser Wage folgende Resultate:

φ	P Gran	$P:\varphi$
5	$9\frac{1}{2}$	1,90
10	19	1,90
15	$28\frac{1}{2}$	1,90
30	$57\frac{1}{2}$	1,92
40	$76\frac{1}{2}$	1,91
80	154	1,92

Man sieht aus der dritten Kolumne, wie genau das angehängte Gewicht, und folglich auch die ausdehnende Kraft der Feder, dem Umdrehungswinkel proportional ist. Diese Schlußfolge wird auch durch die übrigen Versuche, die Berthoud unter sehr mannigfaltigen Abänderungen angestellt hat, aufs Vollkommenste bestätigt, daß man wohl kein Bedenken tragen kann, sie für einen allgemeinen Erfahrungssatz gelten zu lassen.

§. 339.

Aufgabe. Die Kraft der schwingenden Spiralfeder in einer Taschenuhr ist gegeben, nebst der Gestalt und dem Gewichte der Unruhe, die sie in Bewegung setzt; man sucht die Dauer ihrer Schwingungen.

Aufl. 1) Es sey der Winkel, den die Unruhe nach Verlauf einer Zeit t beschrieben hat, $= \omega$, ihr Moment der Trägheit in Bezug auf die Umdrehungsaxe $= Mh^2$, der Halbmesser der Axe $= e$; ferner die Kraft der Feder für eine Zusammenwindung von 180° $= K$, so ist sie für gegenwärtigen Winkel $= \frac{K\omega}{\pi}$, und folglich ihr Moment, die Unruhe nach entgegengesetzter Richtung zu drehen, $= \frac{K\omega e}{\pi}$, also:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{2gK\omega e}{\pi Mh^2}.$$

2) Diese Gleichung durch $\frac{d\omega}{dt}$ multiplicirt, und so dann integrirt, giebt:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = C - \frac{2geK\omega^2}{\pi Mh^2}$$

und wenn man die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$ setzt, wird für $t = o$, $\gamma^2 = C$, mithin:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \gamma^2 - \frac{2geK\omega^2}{\pi Mh^2}.$$

3) Es sey die größte Ausweichung der Unruhe, oder ihr halber Schwingungsbogen $= \zeta$, so wird für $\omega = \zeta$, $\frac{d\omega}{dt} = o$, also: $\frac{2geK\zeta^2}{\pi Mh^2} = \gamma^2$, oder $\zeta = \gamma\sqrt{\frac{\pi Mh^2}{2geK}}$.

4) Hierdurch wird $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2}\right)$, folglich

$$\gamma dt = \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2}\right)}},$$

und wenn man integrirt:

$$\gamma t = \zeta \, . \text{ arc Sin } \frac{\omega}{\zeta}.$$

5) Darin $\omega = \zeta$ gesetzt, giebt die Zeit einer halben Schwingung

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\pi Mh^2}{2geK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 h^2 M}{8geK}}.$$

§. 340.

Da in der gefundenen Formel die größte Ausweichung ζ der Unruhe oder Feder nicht vorkommt, so folgt, daß die Dauer ihrer Schwingungen unverändert dieselbe sey, sie mögen in Bogen geschehen, von welcher Größe man will. Diese merkwürdige Eigenschaft der Spiralfedern, die beym Pendel nur für unendlich kleine Schwingungsbogen statt findet, hat schon s'Gravesande aus mehreren angestellten Beobachtungen wahrgenommen. Man sehe hierüber dessen Elementa Physices Tom. I. art. 784.

§. 341.

Es sey die Unruhe eine cylindrische Platte vom Halbmesser $= f$, ihre Masse $= M$; ferner ein Gewicht, das an ihrem Umfange angebracht, der elastischen Kraft der Feder für den Umdrehungswinkel $\varphi = 180°$ das Gleichgewicht hält, $= G$, so wird $h^2 = \frac{1}{2} f^2$, und $Ke = Gf$, folglich die Zeit einer halben Schwingung

$$t = \sqrt{\frac{\pi^3 f M}{32 g G}},$$

welches eben die Formel ist, die **Atwood** in seiner Abhandlung über die Vibrationen der Uhrfedern *) auf ähnliche Art hergeleitet hat. Er führt zu ihrer Prüfung folgendes Beyspiel an:

Bey einer Uhr von **Kendal**, nach Harrisons Me-

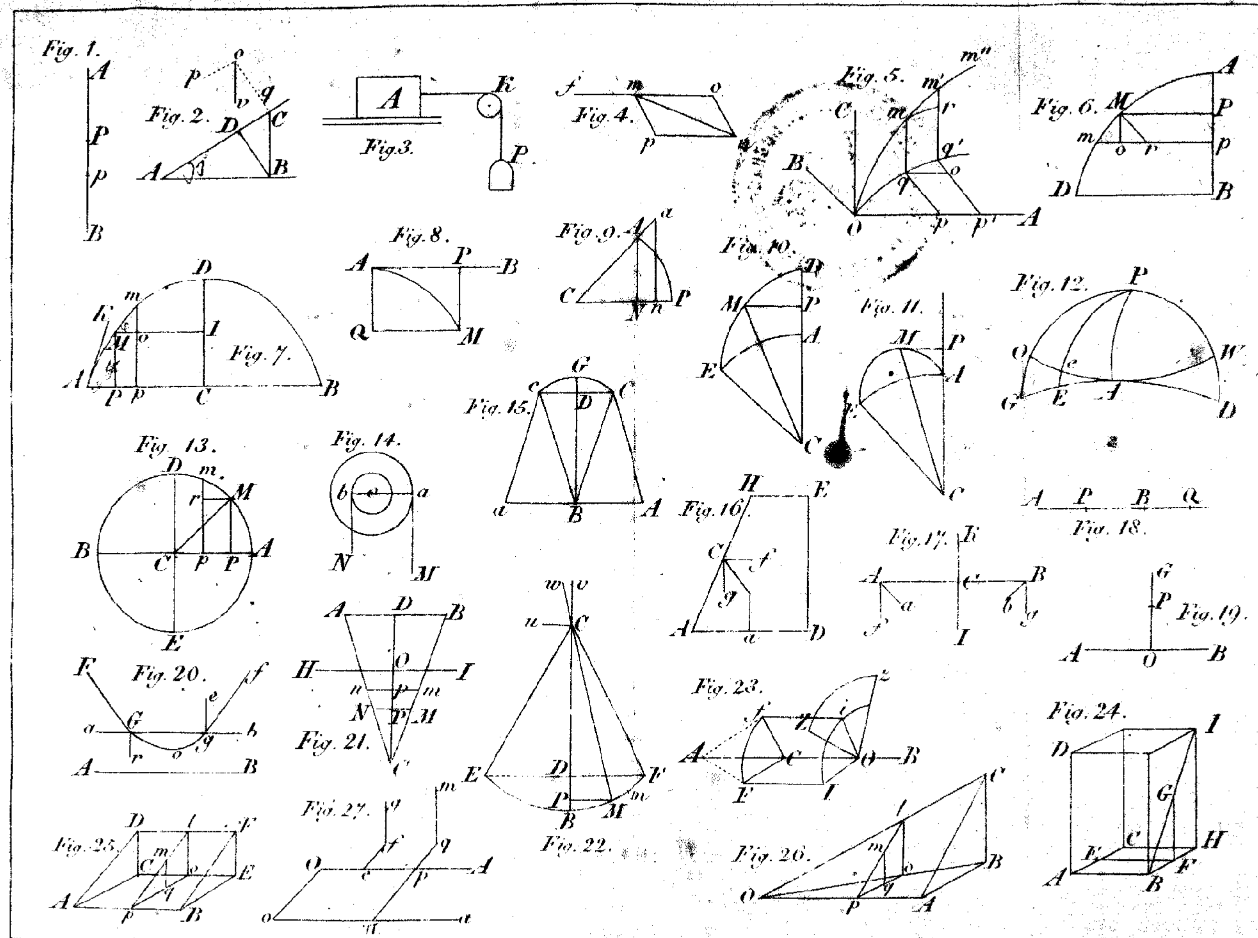
*) S. Philos. transact. 1794 P. I. pag. 119. u. f.

thode gearbeitet, die Cook auf seiner letzten Reise in die Südsee mitnahm, war der Halbmesser der Unruhe $f = 1\frac{1}{8}$ engl. Zoll, ihr Gewicht $M = 42$ Gran. Das Gewicht G fand er durch einen Versuch $= 48$ Gran.

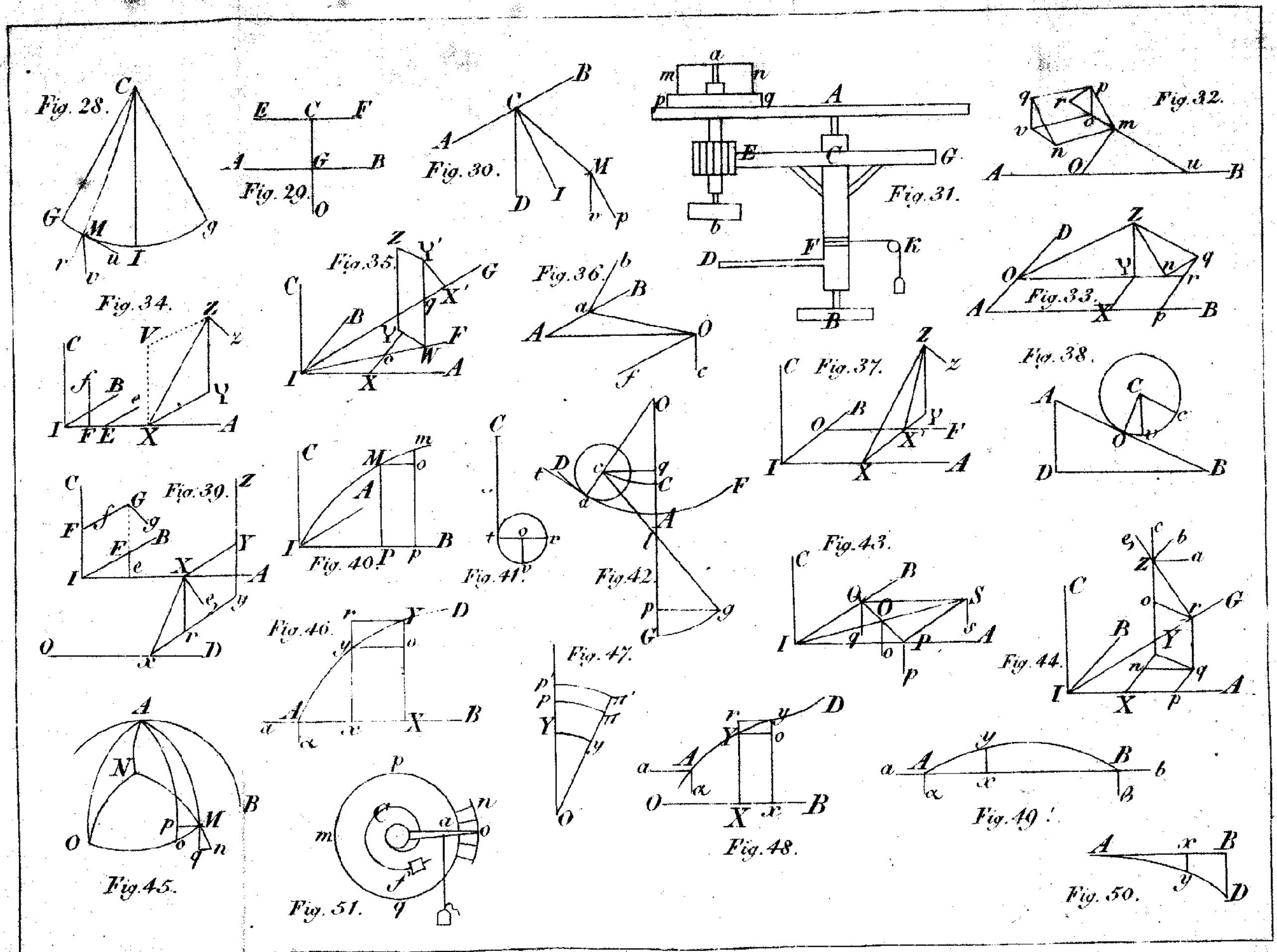
Man erhält also

$$\log \pi^3 fM = 3{,}1658514$$
$$\log 32gG = \underline{5{,}1709185}$$
$$1{,}9949329 - 4$$
$$\log t = 0{,}9974664 - 2$$
$$t = 0{,}0994 \text{ Sec.}$$

Die Uhr machte in einer Secunde 5 Schwingungen, also war die Zeit einer halben Schwingung $= 0{,}1$ Sec., welche von der gefundenen nur um 0,0006 Sec. abweicht.



Ide System der Mechanic
Th. 2. Tab. I.



Ide System der Mechanic
Th. 2. Tab. II.